

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΩΝ

ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

ΤΖΟΥΝΑΚΟΣ Ν. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΑΙ:

- ▶ Συνοπτική Θεωρία
- ▶ Μέθοδοι επίλυσης ασκήσεων
- ▶ Αναλυτικοί τρόποι σκέψης
- ▶ Λυμένα παραδείγματα
- ▶ Άλυτες ασκήσεις

11) Για ασκήσεις στις οποίες μας ζητούν να δείξουμε ότι μια ισότητα αληθεύει $\forall x \in \Delta$ (η σκέψη οδηγείται στο ότι μας ζητούν να δείξουμε πως μια συνάρτηση είναι σταθερή)

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ

- Φέρε όλους τους όρους της ζητούμενης ισότητας στο 1^ο μέλος
- Θεώρησε τη συνάρτηση f που προκύπτει
- Βρες την παράγωγο $f'(x)$ (σίγουρα θα βρεις $f'(x) = 0$, άρα θα έχεις $f(x) = c$ (1))
- Υπολογίζεις το c , βάζοντας στην (1) όπου x "κατάλληλο" (σίγουρα θα έχεις $c = 0$)



Αν $f''(x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ δείξτε ότι

(i) $[f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (ii) $f(x) = \eta\mu x$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• Τυπολόγιο		Σελ.	_1
♦ Συνοπτική θεωρία ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ		Σελ.	_2
		Σελ.	_5
• Ζητείται:			
Η παράγωγος μιας συνάρτησης f , είτε γνωστού, είτε άγνωστου τύπου	(ΜΕΘ. 1)	Σελ.	_5
Η παράγωγος τιμής παρ/μης f , που ικανοποιεί συναρτησιακή σχέση	(ΜΕΘ. 2)	Σελ.	_10
Εφαπτόμενη της C_f (α) Με γνωστό το σημείο επαφής	(ΜΕΘ. 3 _a)	Σελ.	_11
(β) Με άγνωστο το σημείο επαφής	(ΜΕΘ. 3 _β)	Σελ.	_16
Ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους	(ΜΕΘ. 4)	Σελ.	_22
♦ Ασκήσεις που αναφέρονται σε Μονotonία – Ακρότατα μιας f	(ΜΕΘ. 5)	Σελ.	_24
Ζητούν: Μονotonία – Ακρότατα μιας f	(ΜΕΘ. 5 ₁)	Σελ.	_24
Ζητούν: Σύνολο Τιμών $f(A)$ μιας f	(ΜΕΘ. 5 ₂)	Σελ.	_28
Ζητούν: Κρίσιμα Σημεία – Πιθανά Ακρότατα – Ακρότατα μιας f	(ΜΕΘ. 5 ₃)	Σελ.	_31
Ζητούν τιμές παραμέτρων ώστε η f : να είναι ↗ ή ↘	(ΜΕΘ. 5 ₄)	Σελ.	_33
:να έχει ακρότατο σε $x_0 \in A_f$	(ΜΕΘ. 5 ₅)	Σελ.	_36
Δίνεται συναρτησιακή σχέση της f και ζητούν να δείξουμε ότι δεν έχει Ακρότατα	(ΜΕΘ. 5 ₆)	Σελ.	_38
• Ζητείται η εύρεση του τύπου της f όταν γνωρίζω την f'	(ΜΕΘ. 6 _a)	Σελ.	_40
	(ΜΕΘ. 6 _β)	Σελ.	_41
♦ Ζητείται η εύρεση του τύπου της $f^{(v)}(x)$ όταν γνωρίζω την $f(x)$	(ΜΕΘ. 7)	Σελ.	_42
♦ Ασκήσεις που αναφέρονται στο πλήθος ριζών εξίσωσης	(ΜΕΘ. 8)	Σελ.	_45
Τουλάχιστο μία ρίζα (ή δύο – τρεις...ριζες)	(ΜΕΘ. 8 ₁)	Σελ.	_45
Το πολύ μία ρίζα (ή δύο – τρεις...ριζες)	(ΜΕΘ. 8 ₂)	Σελ.	_49
Ακριβώς μία ρίζα (ή δύο – τρεις...ριζες)	(ΜΕΘ. 8 ₃)	Σελ.	_52
♦ Ζητούν να αποδείξουμε ότι ισχύει μια ανίσωση	(ΜΕΘ. 9)	Σελ.	_54
Η ανίσωση έχει μόνο μία μεταβλητή	(ΜΕΘ. 9 ₁)	Σελ.	_54
Η ανίσωση έχει δύο μεταβλητές	(ΜΕΘ. 9 ₂)	Σελ.	_59
Η ανίσωση έχει μόνο αριθμούς	(ΜΕΘ. 9 ₃)	Σελ.	_62
Ειδική περίπτωση απόδειξης ανίσοσης	(ΜΕΘ. 9*)	Σελ.	_65
♦ Δίνουν ανίσωση που αληθεύει $\forall x \in \Delta$ και ζητούν κάτι άλλο	(ΜΕΘ. 10)	Σελ.	_67
♦ Ζητούν να αποδείξουμε ότι αληθεύει μια ισότητα $\forall x \in \Delta$	(ΜΕΘ. 11)	Σελ.	_70
♦ Πότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle	(ΜΕΘ. 12)	Σελ.	_74
♦ Πότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής	(ΜΕΘ. 13)	Σελ.	_80
♦ Ζητείται η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή ενός μεγέθους	(ΜΕΘ. 14)	Σελ.	_84
EXTRA τρόπος εύρεσης μέγιστης - ελάχιστης τιμής ενός μεγέθους		Σελ.	_91
♦ Εύρεση Κοιλών – Κυρτών – Σημείων Καμπής Δοσμένης $f(x)$	(ΜΕΘ. 15)	Σελ.	_92
Ζητούν τιμές παραμέτρων ώστε η f : να έχει καμπή στο $x_0 \in A_f$	(ΜΕΘ. 15 ₁)	Σελ.	_96
Δίνεται συναρτησιακή σχέση της f και ζητούν να δείξουμε ότι δεν έχει Σημεία Καμπής	(ΜΕΘ. 15 ₂)	Σελ.	_97
Ζητούν τιμές παραμέτρων ώστε η f να είναι σταθερή ως προς τα κοίλα	(ΜΕΘ. 15 ₃)	Σελ.	_98
♦ Υπολογισμός Ορίων με κανόνα DE L' HOSPITAL	(ΜΕΘ. 16)	Σελ.	_101
Ιδιόμορφες περιπτώσεις Ορίων που υπολογίζονται με D. L. H.	(ΜΕΘ. 16 ₁)	Σελ.	_104
♦ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ	(ΜΕΘ. 17)	Σελ.	_109
♦ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ C_f , $C_{f'}$, $C_{f''}$ - Συμπεράσματα που αποκομίζω	(ΜΕΘ. 18)	Σελ.	_127
♦ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ	(ΜΕΘ. 19)	Σελ.	_130
♦ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – Χάραξη Γραφικής Παράστασης (C_f)	(ΜΕΘ. 20)	Σελ.	_133
♦ Γενικά Παραδείγματα		Σελ.	_140
♦ Επίλυση "Δυσκολών" εξισώσεων – ανισώσεων (σημαντικές παρατηρήσεις)		Σελ.	_144
♦ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ		Σελ.	_161

Φιλοδοξία είναι να μπορέσει ο μαθητής,
να βρεί τρόπους αντιμετώπισης οποιασδήποτε
άσκησης, ανεξάρτητα από την παράγραφο του
σχολικού βιβλίου στην οποία ανήκει.....

....αφού πρώτα έχει κατανοήσει τα
Ζητούμενα και τα Δεδομένα της άσκησης



ΤΖΟΥΝΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
Μαθηματικός

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Π.Ν.Τ.Ζ.

Ορισμός Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A_f$. Τον πραγματικό αριθμό l τον ονομάζουμε παράγωγο τιμή της f στο x_0 και τον συμβολίζουμε $f'(x_0)$.

Ισοδύναμος ορισμός Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x_0) = l$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΤΥΠΟΣ		ΣΥΝΘΕΣΗ		ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΠΡΑΞΕΩΝ
$f(x)$	$f'(x)$	$[(g \circ f)(x)]' = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$		
c	0			$(f + g)' = f' + g'$
x	1			
χ^a	$a \cdot \chi^{a-1}$	$f^a(x)$	$a \cdot f^{a-1}(x) \cdot f'(x)$	$(f - g)' = f' - g'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$	$(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' \quad , \lambda \in \Re$
ημx	συνx	ημ f(x)	συν f(x) · f'(x)	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
συνx	-ημx	συν f(x)	-ημ f(x) · f'(x)	
εφx	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \chi}$	εφ f(x)	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} \cdot f'(x)$	$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$
σφχ	$\frac{-1}{\eta\mu^3 \chi}$	σφ f(x)	$\frac{-1}{\eta\mu^3 f(x)} \cdot f'(x)$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$
lnx, x>0	$\frac{1}{x}, x>0$	ln f(x) , f(x)>0	$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), f(x)>0$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$\ln x , x \neq 0$	$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln f(x) , f(x) \neq 0$	$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), f(x) \neq 0$	ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΡΙΖΙΚΩΝ ΤΑΞΗΣ > 2 $\sqrt[p]{(f(x))^K} = (f(x))^{\frac{K}{p}}$
$\log_\alpha \chi, \chi > 0$	$\frac{1}{\chi \cdot \ln \alpha}, \chi > 0$	$\log_\alpha (f(\chi)) , f(x) > 0$	$\frac{1}{f(x) \cdot \ln \alpha} \cdot f'(x), f(x) > 0$	
e^x	e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$	
Ι Δ Ι Α Ι Τ Ε Ρ Ο Τ Η Σ Ε Σ	$\left\{ [f(x)]^{g(x)} \right\}' = \left\{ e^{g(x) \ln f(x)} \right\}' = \dots\dots\dots$			
	$\left[\log_{g(x)} f(x) \right]' = \left[\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} \right]' = \dots\dots\dots$			
	${}^{2P+1}\sqrt{(f(x))^{2K}} = {}^{2P+1}\sqrt{ f(x) ^{2K}} = \begin{cases} [f(x)]^{\frac{2K}{2P+1}} & , x \in A_f \text{ ώστε } f(x) \geq 0 \\ [-f(x)]^{\frac{2K}{2P+1}} & , x \in A_f \text{ ώστε } f(x) < 0 \end{cases}$ $P \in \mathbb{N}^*, K \in \mathbb{Z}^*$			

ΘΕΩΡΙΑ (Συνοπτική με σύντομες παρατηρήσεις)**ΠΡΟΣΟΧΗ !!**

Για ΟΛΑ τα θεωρήματα των παραγώγων
απαραίτητη προϋπόθεση για
την εφαρμογή τους είναι να
έχουμε **συνεχή** συνάρτηση

A) εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 \in A_f$ ✓ Αν υπάρχει η $f'(x_0)$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

✓ Αν δεν υπάρχει η $f'(x_0)$ τότε :

$$1. \text{ αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$$

Όχι κατ' ανάγκη με
ίδιο πρόσημο το ∞

τότε υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f στο x_0 και είναι η κατακόρυφη : $x = x_0$

$$2. \text{ αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

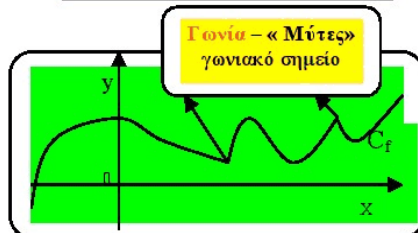
Όχι όμως η περίπτωση
 $+\infty \neq -\infty$ ή $-\infty \neq +\infty$

τότε δεν υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f στο x_0

Λέμε ότι το σημείο $(x_0, f(x_0))$
είναι **Γωνιακό σημείο**

Γωνιακό σημείο είναι το σημείο όπου η f είναι συνεχής
αλλά όχι παραγωγίσιμη

βλέπε σχήμα : →



Συμβολίζει ταχύτητα αλλαγής

B) ρυθμός μεταβολής

Κυρίως για μεγέθη που εξαρτώνται από το χρόνο.
Όμως στον τύπο του μεγέθους δεν εμφανίζεται ο
χρόνος, αλλά κάποια άλλη μεταβλητή.

$\frac{d(\text{μεγέθους})}{dt} = \frac{d(\text{μεγέθους})}{d(\text{μεταβλητή} \neq t)} \cdot \frac{d(\text{μεταβλητή} \neq t)}{dt}$		Κανόνας της αλυσίδας
Γενικά ισχύουν	$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ και $\frac{df}{dt} = f'(t)$	$\frac{d^v f}{dt^v} = f^{(v)}(t), v \in \mathbb{N}^*$
Άλλος τρόπος έκφρασης : $[M(x(t))]' = M'(x(t)) \cdot x'(t)$, όπου $x(t)$ η μεταβλητή που εμφανίζεται στο μέγεθος.		

Γ) Αν f παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A_f$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0

ΠΡΟΣΟΧΗ !!
Δεν ισχύει το αντίστροφο !

Δ) Μονοτονία:

Θεώρημα $\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Αν } f'(x) > 0 \ \forall x \text{ εσωτερικό ενός διαστήματος } \Delta, \text{ τότε } f \nearrow \text{ σε όλο το } \Delta \\ * \text{ Αν } f'(x) < 0 \ \forall x \text{ εσωτερικό ενός διαστήματος } \Delta, \text{ τότε } f \searrow \text{ σε όλο το } \Delta \\ * \text{ Αν } f'(x) = 0 \ \forall x \text{ εσωτερικό ενός διαστήματος } \Delta, \text{ τότε } f \rightarrow \text{ σταθερή στο } \Delta \end{array} \right.$

Ε) $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in \Delta \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c, c \in \mathbb{R}$

ΣΤ) Κρίσιμα σημεία:

x_0 εσωτερικό του A_f με
 $f'(x_0) = 0$ ή $\nexists f'(x_0)$

τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται καθώς και τα σημεία όπου η παράγωγος μηδενίζεται.

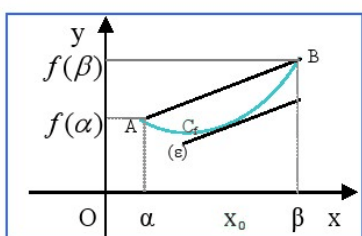
Ζ) Πιθανά ακρότατα: $\rightarrow$ Κρίσιμα σημεία $\left(f'(x_0) = 0 \text{ ή } \nexists f'(x_0) \right)$
 $\rightarrow$ Άκρα κλειστών διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f

Η) Ακρότατα: (βρίσκονται εύκολα) Από τον πίνακα πρόσημων της $f'(x)$

Θεώρημα Fermat Αν μια συνάρτηση f ορίζεται σε ανοικτό διάστημα Δ , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε είναι $f'(x_0) = 0$

Προσοχή! το αντίστροφο δεν ισχύει Δηλ. Αν για κάποιο x_0 εσωτερικό ενός διαστήματος Δ είναι $f'(x_0) = 0$ τότε δεν σημαίνει ότι οπωσδήποτε έχω ακρότατο στο x_0

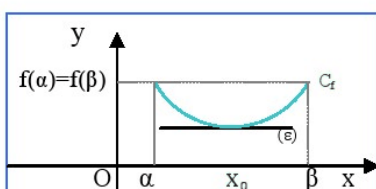
Θ) Θ.Μ.Τ. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ } τότε $\exists x_0 \in (a, \beta)$ ώστε
παρ/μη στο (a, β) } $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$



Γεωμετρική ερμηνεία: Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ και f παραγωγίσιμη στο (a, β) τότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$ Δηλ. ο συντελεστής διεύθυνσης

της εφαπτομένης της C_f σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του τμήματος AB με $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$. Άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στο τμήμα AB .

Ι) Θ. Rolle Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ } τότε $\exists x_0 \in (a, \beta)$ ώστε
παρ/μη στο (a, β) } $f'(x_0) = 0$
 $f(a) = f(\beta)$



Γεωμετρική ερμηνεία: Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$, f παραγωγίσιμη στο (a, β) και $f(a) = f(\beta)$ τότε από Θ. Rolle, υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f'(x_0) = 0$

Δηλ. ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ίσος με μηδέν άρα η εφαπτομένη της C_f σ' αυτό το σημείο είναι παράλληλη στον άξονα $x x'$

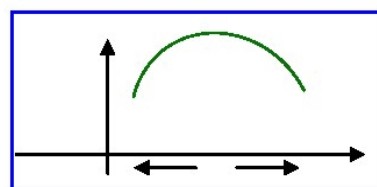
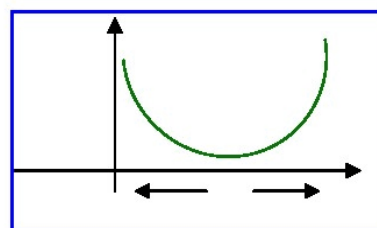
K) ΚΟΙΛΑ-ΚΥΡΤΑ

Ορισμός Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι

- Η συνάρτηση f **στρέφει τα κοίλα** προς τα **άνω** (ή είναι **κυρτή**) στο Δ , αν η f' ↗ στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f **στρέφει τα κοίλα** προς τα **κάτω** (ή είναι **κοίλη**) στο Δ , αν η f' ↘ στο εσωτερικό του Δ .

Θεώρημα Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ τότε

- Αν $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ τότε η C_f **στρέφει τα κοίλα** **άνω** σε όλο το διάστημα Δ (Δηλ. είναι **κυρτή**).
- Αν $f''(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ τότε η C_f **στρέφει τα κοίλα** **κάτω** σε όλο το διάστημα Δ (Δηλ. είναι **κοίλη**).

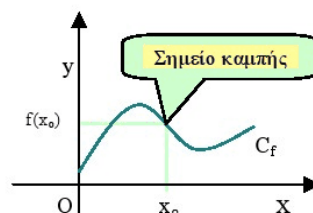


ΠΡΟΣΕΞΕ! Αν γνωρίζεις ότι μια συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα Δ τότε κάθε εφαπτόμενη ευθεία: $y = ax + b$ σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$ βρίσκεται πάνω από το γράφημα της συνάρτησης. Δηλαδή ισχύει: $ax + b \geq f(x) \quad \forall x \in \Delta$

Αντίστοιχα Αν η συνάρτηση είναι κυρτή τότε θα ισχύει: $ax + b \leq f(x) \quad \forall x \in \Delta$

Λ) Σημεία καμπής

Ορισμός Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f στο x_0 και αλλάζουν τα κοίλα δεξιά – αριστερά του x_0 τότε στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ η C_f παρουσιάζει καμπή.



ΠΡΟΣΟΧΗ! Αν $f''(x_0) = 0$ και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο δεξιά – αριστερά του x_0 τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής

Μ) Κανόνας De L' Hospital

Αν f, g δύο παραγωγίσιμες σε μια περιοχή του x_0 συναρτήσεις και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$

τότε θα έχεις $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ)

Π.Ν.Π.

- 1) I) Ζητούν την παράγωγο μιας συνάρτησης f με γνωστό τον τύπο της τότε:
- Όπου δεν αλλάζει ο τύπος βρίσκουμε την παράγωγο με τους κανόνες παραγώγισης.
 - Στα σημεία που αλλάζει ο τύπος βρίσκουμε την παράγωγο με τον ορισμό.
- II) Ζητούν την παράγωγο μιας συνάρτησης f άγνωστου τύπου και μας δίνουν
- μια συναρτησιακή σχέση (ισότητα ή ανισότητα) που ικανοποιεί ο τύπος της τότε:
 - Προσπαθώ να βρω τον τύπο της f (Θυμηθείτε συναρτησιακές σχέσεις Κεφάλαιο Συναρτήσεων)
 - Παρουσιάζω στην συναρτησιακή σχέση την παράσταση $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και παίρνω το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 1^{\text{ο μέλος}} \dots \lim_{x \rightarrow x_0} 2^{\text{ο μέλος}} \quad (\text{Θυμηθείτε όρια και συναρτησιακές σχέσεις Κεφάλαιο Ορίων})$$
 - Όριο μιας παράστασης που συμμετέχει η f τότε: (Θυμηθείτε δοσμένα όρια Κεφάλαιο Ορίων)

ή Ονομάζω την παράσταση της f που έχω στο δοσμένο όριο $= h(x)$ και λύνω ως προς $f(x)$ ή Παρουσιάζω στο ζητούμενο όριο, την παράσταση της f που έχω στο δοσμένο.

παράδειγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 7 & , x \leq 1 \\ x^3 + x^2 - 7x + 8 & , x > 1 \end{cases}$, όπου αυτή ορίζεται.

Λύση

Για $x < 1$ η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = x^2 - 5x + 7$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Για $x > 1$ η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 8$ άρα είναι επίσης συνεχής ως πολυωνυμική. Θα ελέγξω αν η συνάρτηση είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \text{Έχω } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 5x + 7) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x^2 - 7x + 8) = 3 \\ f(1) &= 3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 3 \\ \text{άρα είναι συνεχής και στο } x_0 &= 1. \end{aligned}$$

Τώρα θα βρω την παράγωγο της f όπου αυτή ορίζεται.

$$\text{Για } x < 1 \text{ έχω } f'(x) = (x^2 - 5x + 7)' = 2x - 5$$

$$\text{για } x > 1 \text{ έχω } f'(x) = (x^3 + x^2 - 7x + 8)' = 3x^2 + 2x - 7$$

$$\text{για } x_0 = 1 \text{ έχω : } \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 5x + 7 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 4)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 4) = -3 \quad (\alpha)$$

$$\bullet \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x^2 - 7x + 8 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x^2 - 7x + 5}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x^2 + 2x - 5)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2x - 5) = -2 \quad (\beta)$$

Από (α), (β) έχω $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

$$\text{Τελικά έχω } f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & , x < 1 \\ 3x^2 + 2x - 7 & , x > 1 \end{cases}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

ό,τι και αν μου ζητούν στο κεφάλαιο των παραγώγων πρώτα εξασφαλίζω τη συνέχεια..

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

(εμπειρική)

Όταν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 \in A_f$ τότε θα έχεις

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

Π x 2) Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - \alpha x + \beta}{x-1} & , x > 1 \\ \gamma x - 1 & , x \leq 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Λύση

Για να είναι παραγωγίσιμη η f στο $x_0 = 1$ πρέπει πρώτα να είναι **συνεχής** στο $x_0 = 1$

Άρα θα πρέπει να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ (A)

Έχω $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\gamma x - 1) = \gamma - 1 = f(1)$

Θυμήσου από τα παραμετρικά όρια ότι αφήνω στην αρχή μια κενή σειρά για να μπορέσω μετά να συμπληρώσω τις περιπτώσεις που εμφανίζονται στο παραμετρικό όριο

Αν $1 - \alpha + \beta > 0$ έχω :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - \alpha x + \beta}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - \alpha x + \beta) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = (1 - \alpha + \beta) \cdot (+\infty) = +\infty$$

οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Αν $1 - \alpha + \beta < 0$ έχω :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - \alpha x + \beta}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - \alpha x + \beta) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = (1 - \alpha + \beta) \cdot (+\infty) = -\infty$$

οπότε και πάλι η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Αν $1 - \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 + \beta$ έχω :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - (1 + \beta)x + \beta}{x-1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 + x - \beta)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x - \beta) = 2 - \beta$$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 1$ δηλ. να επαληθεύεται

η συνθήκη (A) θα πρέπει να ισχύουν: $\underline{\alpha = 1 + \beta}$ και $\gamma - 1 = 2 - \beta \Leftrightarrow \underline{\gamma = 3 - \beta}$

$$\begin{aligned} \text{Τελικά έχω } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3 - (1 + \beta)x + \beta}{x-1} & , x > 1 \\ (3 - \beta)x - 1 & , x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 + x - \beta)(x-1)}{x-1} & , x > 1 \\ (3 - \beta)x - 1 & , x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) &= \begin{cases} x^2 + x - \beta & , x > 1 \\ (3 - \beta)x - 1 & , x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Για να είναι παρ/μη η f στο $x_0 = 1$ πρέπει να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ (B)

$$\text{Έχω } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3 - \beta)x - 1 - 2 + \beta}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(3 - \beta)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - \beta) = 3 - \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - \beta - 2 + \beta}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3$$

Επομένως για να είναι παρ/μη η f στο $x_0=1$, δηλ. να επαληθεύεται η συνθήκη (B), πρέπει να ισχύει $3 - \beta = 3 \Leftrightarrow \underline{\beta = 0}$

Τελικά για να είναι παρ/μη η f στο $x_0=1$ πρέπει να ισχύουν οι ισότητες:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 1 + \beta \\ \gamma = 3 - \beta \\ \beta = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \gamma = 3 \\ \beta = 0 \end{array} \right. \quad \text{Άρα } (a, \beta, \gamma) = (1, 0, 3)$$

Π.χ. 3) Δίνεται συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x^2 + x - 1}{x^2 - 9} = 1$
Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$

Λύση

Θα δείξω ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό. Δηλ. θα βρώ

$$\text{το } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

Ευκαιρία να θυμηθούμε πώς βρίσκουμε ένα όριο όταν δίνεται άλλο όριο και

πώς βρίσκουμε το $f(x_0)$ όταν η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0

Ονομάζω $\frac{f(x) - x^2 + x - 1}{x^2 - 9} = g(x)$, για x ανήκει σε περιοχή του $x_0 = 3$,

$$\text{άρα } f(x) = (x^2 - 9)g(x) + x^2 - x + 1$$

$$\text{Ακόμα είναι } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=3$ έχω $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} [(x^2 - 9)g(x) + x^2 - x + 1] =$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} g(x) + \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 1) = 0 \cdot 1 + (9 - 3 + 1) = 7$$

Έχω λοιπόν

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)g(x) + x^2 - x + 1 - 7}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)g(x) + x^2 - x - 6}{x - 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)g(x) + (x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x - 3)}[(x + 3)g(x) + (x + 2)]}{\cancel{x - 3}} = 6 \cdot 1 + 5 = 11 \in \mathbb{R}$$

Άρα: $f'(3) = 11$

Π.χ. 4) Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f(0) = 2004$, για την οποία ισχύει: $f(x) - \eta \mu x \leq 2004 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η $f'(0)$

Λύση

Επειδή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 2004}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 2004}{x} = f'(0)$$

Έχω: $f(x) - \eta \mu x \leq 2004 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - 2004 \leq \eta \mu x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Άρα για $x > 0$

$$\text{θα ισχύει: } \frac{f(x) - 2004}{x} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \text{ και άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 2004}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{x} \Leftrightarrow f'(0) \leq 1 \quad (1)$$

Ακόμα για $x < 0$ θα ισχύει: $\frac{f(x) - 2004}{x} \geq \frac{\eta\mu x}{x}$ και άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 2004}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow$
 $f'(0) \geq 1 \quad (2)$

Από (1) και (2) έχω ότι $f'(0) = 1$

Π. 5) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτησης, όπου αυτή ορίζεται, των συναρτήσεων με τύπο: α) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ β) $g(x) = \log_x(x+1)$ γ) $h(x) = x^{2x+1}$

Λύση

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση θα πρέπει να ισχύει $(x-2)^2 \geq 0$ το οποίο αληθεύει

$\forall x \in \mathbb{R}$ άρα έχω ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A_f = \mathbb{R}$

Ακόμα έχω ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Για να βρω την παράγωγο εργαζομαι ως εξής:

Θυμήσου τις ιδιαιτερότητες στους κανόνες παραγωγής και παρατήρησε ότι αν δεν γινόταν δίκλαδη η συνάρτηση δεν θα βρισκόταν η παράγωγος για $x < 2$

Η συνάρτηση γράφεται: $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{|x-2|^2} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-2)^2}, & x \geq 2 \\ \sqrt[3]{(2-x)^2}, & x < 2 \end{cases}$

Για $x > 2$ έχω: $f'(x) = \left(\sqrt[3]{(x-2)^2} \right)' = \left[(x-2)^{\frac{2}{3}} \right]' = \frac{2}{3} (x-2)^{-\frac{1}{3}} (x-2)'$

Άρα $f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x-2}}, x > 2$

Για $x < 2$ έχω: $f'(x) = \left(\sqrt[3]{(2-x)^2} \right)' = \left[(2-x)^{\frac{2}{3}} \right]' = \frac{2}{3} (2-x)^{-\frac{1}{3}} (2-x)'$

Άρα $f'(x) = \frac{-2}{3 \cdot \sqrt[3]{2-x}}, x < 2$

Για $x = 2$ έχω: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} \cdot \sqrt[3]{x-2}}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{x-2}} =$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^3}}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = +\infty$

Άρα δεν ορίζεται η παράγωγος τιμή της συνάρτησης στο $x_0 = 2$

Άρα έχω $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x-2}}, & x > 2 \\ \frac{-2}{3 \cdot \sqrt[3]{2-x}}, & x < 2 \end{cases}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

(σε συνέχεια της παραπάνω υπενθύμισης)
Ποτέ το πεδίο ορισμού της παράγωγου συνάρτησης δεν υπολείπεται του αντίστοιχου της δοσμένης συνάρτησης κατά ολόκληρο διάστημα (κάτι που θα γινόταν εδώ αν δεν κάναμε δίκλαδη την συνάρτηση f και έτσι θα υπολείπετο το πεδίο ορισμού της παράγωγου από αυτό της f κατά το διάστημα $(-\infty, 2)$)

β) Για να ορίζεται η συνάρτηση θα πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί:
 i) $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
 ii) $x > 0$ και $x \neq 1$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι : $A_g = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Η συνάρτηση g γράφεται: $g(x) = \log_x(x+1) \Leftrightarrow g(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$

και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της A_g ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων.

Για την παράγωγο της g έχω:

$$g'(x) = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)' = \frac{(\ln(x+1))' \cdot \ln x - \ln(x+1) \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot (x+1)' \cdot \ln x - \ln(x+1) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}$$

Άρα $g'(x) = \frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

Θυμήσου τις ιδιαιτερότητες στους κανόνες παραγωγισής και παρατήρησε ότι αν δεν χρησιμοποιούσαμε τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαριθμικών δεν θα βρισκόταν η παράγωγος της g

γ) Για να ορίζεται η συνάρτηση θα πρέπει να ισχύει $x > 0$. Άρα $A_h = (0,+\infty)$

Η h ισοδύναμα γράφεται $h(x) = e^{(2x+1)\ln x}$ άρα είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, αφού ορίζεται από πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Για την παράγωγο της h έχω:

$$h'(x) = (x^{2x+1})' = (e^{(2x+1)\ln x})' = e^{(2x+1)\ln x} ((2x+1) \cdot \ln x)' = x^{2x+1} ((2x+1)' \ln x + (2x+1)(\ln x)')$$

Άρα $h'(x) = x^{2x+1} \cdot \left(2 \ln x + \frac{2x+1}{x} \right)$, $x \in (0,+\infty)$

Π.Χ. 6) Αν f, g δύο παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

$$2f^2(x) + 4g^2(x) = 2xf(x) + 4g(x)f(x) - x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να βρεθούν α) $f(0)$, $g(0)$ και β) $f'(0)$, $g'(0)$

Λύση

α) Αν στην σχέση $2f^2(x) + 4g^2(x) = 2xf(x) + 4g(x)f(x) - x^2$ (1) θέσω $x = 0$ θα έχω

$$2f^2(0) + 4g^2(0) = 2 \cdot 0 \cdot f(0) + 4g(0) \cdot f(0) - 0^2 \Leftrightarrow f^2(0) - 2g(0) \cdot f(0) + 2g^2(0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(0) - g(0))^2 + g^2(0) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0 \text{ και } f(0) = g(0) = 0$$

β) Αφού οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $X_0 = 0$ θα ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= f'(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= g'(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0) \end{aligned} \right\} (2)$$

Διαιρώντας την σχέση (1) με x^2 ($x \neq 0$), έχω:

$$2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 + 4 \left(\frac{g(x)}{x} \right)^2 = 2 \left(\frac{f(x)}{x} \right) + 4 \left(\frac{f(x)}{x} \right) \left(\frac{g(x)}{x} \right) - 1 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 + 4 \left(\frac{g(x)}{x} \right)^2 - 2 \left(\frac{f(x)}{x} \right) - 4 \left(\frac{f(x)}{x} \right) \left(\frac{g(x)}{x} \right) + 1 \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 - 2 \left(\frac{f(x)}{x} \right) + 1 + \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 - 4 \left(\frac{f(x)}{x} \right) \left(\frac{g(x)}{x} \right) + 4 \left(\frac{g(x)}{x} \right)^2 \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right)^2 + \left(\frac{f(x)}{x} - 2 \frac{g(x)}{x} \right)^2 \right] = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} (f'(0) - 1)^2 + (f'(0) - 2g'(0))^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (f'(0) - 1 = 0 \text{ και } f'(0) - 2g'(0) = 0) \text{ άρα είναι } \underline{f'(0) = 1 \text{ και } g'(0) = \frac{1}{2}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Θα μπορούσαμε - στη συγκεκριμένη άσκηση - να βρούμε πρώτα τον τύπο των συναρτήσεων και μετά να βρούμε αυτά που ζητούν

$$(\text{μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνων: } (1) \Leftrightarrow 2f^2(x) + 4g^2(x) = 2xf(x) + 4g(x)f(x) - x^2 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)^2 + (f(x) - 2g(x))^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \text{ και } g(x) = x/2 \text{ κ. λ. π.)}$$

δοκιμάστε με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων στην: $2xf^2(x) + 4xg^2(x) = 2x^2f(x) + 4xg(x)f(x) - x^3, \chi \in \mathbb{R}$

Σχόλιο - ερώτηση

Η παραπάνω περίπτωση θα μπορούσε ίσως να αντιμετωπιστεί με την επόμενη μέθοδο;

Δοκίμασε!

- 2) Αν δίνουν συναρτησιακή σχέση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και χρειάζεσαι κάποια παράγωγο τιμή τους, τότε παραγώγισε και τα δύο μέλη της ισότητας στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (κάνε κανόνες παραγωγίσιμης) **ΠΡΟΣΟΧΗ (!) στις συνθέσεις**

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Π.Χ. 1) Δίνονται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν: α) $f(x^2 + x) \cdot (1 - x + g(x)) = x \cdot f^2(x^2 + x) + g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ και β) $f(0) = 2, g'(-1) = 3$
Να υπολογιστούν οι τιμές: $g(-1)$ και $f'(0)$

Λύση

• Αν στη σχέση $f(x^2 + x) \cdot (1 - x + g(x)) = x \cdot f^2(x^2 + x) + g(x)$ (1) θέσω $x = -1$ θα έχω
 $f(0) \cdot (1 - (-1) + g(-1)) = -1 \cdot f^2(0) + g(-1) \Leftrightarrow 2 \cdot (1 + 1 + g(-1)) = -4 + g(-1) \Leftrightarrow g(-1) = -8$

• • Αν παραγωγίσω τα δύο μέλη της ισότητας (1) θα έχω:

$$\left[f(x^2 + x) \cdot (1 - x + g(x)) \right]' = \left[x \cdot f^2(x^2 + x) + g(x) \right]' \Rightarrow$$

$$\left[f(x^2 + x) \right]' \cdot (1 - x + g(x)) + f(x^2 + x) \cdot (1 - x + g(x))' = \left[x \cdot f^2(x^2 + x) \right]' + g'(x) \Rightarrow$$

$$f'(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' \cdot (1 - x + g(x)) + f(x^2 + x) \cdot (0 - 1 + g'(x)) =$$

$$x' \cdot f^2(x^2 + x) + x \cdot \left[f^2(x^2 + x) \right]' + g'(x) \Rightarrow$$

$$f'(x^2 + x) \cdot (2x + 1) \cdot (1 - x + g(x)) + f(x^2 + x) \cdot (-1 + g'(x)) =$$

$$1 \cdot f^2(x^2 + x) + x \cdot 2 f(x^2 + x) \cdot \left[f(x^2 + x) \right]' + g'(x) \Rightarrow$$

$$f'(x^2 + x) \cdot (2x + 1) \cdot (1 - x + g(x)) + f(x^2 + x) \cdot (-1 + g'(x)) =$$

$$f^2(x^2 + x) + 2x \cdot f(x^2 + x) \cdot f'(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' + g'(x) \Rightarrow$$

$$f'(x^2 + x) \cdot (2x + 1) \cdot (1 - x + g(x)) + f(x^2 + x) \cdot (-1 + g'(x)) =$$

$$f^2(x^2 + x) + 2x \cdot f(x^2 + x) \cdot f'(x^2 + x) \cdot (2x + 1) + g'(x)$$

Οπότε αν θέσω όπου $x = -1$ θα έχω:

$$f'(0) \cdot (-1) \cdot (2 + g(-1)) + f(0) \cdot (-1 + g'(-1)) = f^2(0) - 2 \cdot f(0) \cdot f'(0) \cdot (-1) + g'(-1) \Leftrightarrow$$

$$f'(0) \cdot (-1) \cdot (2 + (-8)) + 2 \cdot (-1 + 3) = 4 + 2 \cdot 2 \cdot f'(0) + 3 \Leftrightarrow 6 \cdot f'(0) + 4 = 7 + 4 \cdot f'(0) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot f'(0) = 3 \quad \text{Άρα} \quad f'(0) = \frac{3}{2}$$

Προσπάθησε να λύσεις την παρακάτω και συμπεράνε ότι λύνεται μόνο με την χρήση της προηγούμενης μεθόδου

$$f^3(x) + 2xf(x) = x^2 + x\eta\mu x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Να βρεθεί η } f'(0)$$

3) Για ασκήσεις που αναφέρονται σε εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης.

(α) περίπτωση: Γνωστό το σημείο επαφής $(x_0, f(x_0))$ τότε ψάξε για την παράγωγο τιμή $f'(x_0)$

(i) Αν υπολογίζεται η τιμή $f'(x_0)$ τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης δίνεται από τον τύπο: $(\epsilon): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

(ii) Αν δεν υπάρχει η $f'(x_0)$ τότε :

$$1. \text{ αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

Όχι κατ' ανάγκη με ίδιο πρόσημο το ∞

τότε υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f στο x_0 και είναι η κατακόρυφη: $x = x_0$

$$2. \text{ αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$$

Όχι όμως η περίπτωση $+\infty \neq -\infty$ ή $-\infty \neq +\infty$

τότε δεν υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f στο x_0

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ 1) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 4$ Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής της παράστασης (C_f) στο σημείο με τετμημένη $X_0 = 3$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού: $A_f = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως πολωνομική.

Ακόμα είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα είναι $f'(3) = 2$ και $f(3) = 1$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στον τύπο της εφαπτόμενης όπου $X_0 = 3$ έχω

$$(\epsilon): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y - 1 = 2 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = 2x - 5$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη ευθεία (ϵ) έχει τύπο: $y = 2x - 5$

π.χ. 2) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$ Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$

Λύση

Πρώτα ελέγχω αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Έχω: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{-x} = 0$
 και $f(0) = 0$

άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Θα προσπαθήσω να υπολογίσω το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ για να δω αν υπάρχει η $f'(0)$

Έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{-x} \cdot \sqrt[3]{(-x)^2}}{x \cdot \sqrt[3]{(-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x \cdot \sqrt[3]{(-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt[3]{(-x)^2}} = -\infty \quad (1)$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$,

Όμως θα υπολογίσω και το άλλο πλευρικό όριο για να δω αν υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{x \cdot \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x \cdot \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad (2)$$

Από (1), (2) έχω ότι υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$ και είναι η

κατακόρυφη ευθεία (ε): $x = 0$

π.χ. 3) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 2, & x \leq 2 \\ x^2 + 3x - 4, & x > 2 \end{cases}$ Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 2$

Λύση

Πρώτα ελέγχω αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Έχω: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3x - 4) = 6$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - 2x + 2) = 6$
 και $f(2) = 6$

άρα $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

Θα προσπαθήσω να υπολογίσω το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ για να δω αν υπάρχει η $f'(2)$

Έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 2x + 2 - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 2x - 4}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x + 2) = 10 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x - 4 - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+5)}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 5) = 7 \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 10 \neq 7 = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ άρα δεν υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 2$

Μορφή 0/0 Παραγοντοποιώ
τον αριθμητή με σχήμα HORNER

1	0	-2	-4	2
	2	4	4	
1	2	2	0	

Π.Χ. 4)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση με τύπο } f(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$$

Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 1$

Λύση

Πρώτα ελέγχω αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Έχω: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2$$

$$\text{και } f(1) = 2$$

άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Θα προσπαθήσω να υπολογίσω το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ για να δω αν υπάρχει η $f'(1)$

Έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 3) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 2) = 4$$

Άρα είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4 \in \mathbb{R}$ άρα έχω $f'(1) = 4$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στον τύπο της εφαπτόμενης όπου $x_0 = 1$ έχω

$$(ε): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 4 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 2$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη ευθεία (ε) έχει τύπο: $y = 4x - 2$

Π.Χ. 5)

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση με τύπο } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq -1 \\ 2x^2 + x - 1, & x < -1 \end{cases}$$

Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = -1$

Λύση

Πρώτα ελέγχω αν η f είναι συνεχής στο $X_0 = -1$.

$$\text{Έχω: } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\sqrt{x+1}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2 + x - 1) = 0$$

$$\text{και } f(1) = 0$$

άρα $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1)$ άρα η f είναι συνεχής στο $X_0 = -1$

Θα προσπαθήσω να υπολογίσω το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ για να δω αν υπάρχει η $f'(-1)$

Έχω:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 + x - 1 - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(2x-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x-1) = -3 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}}{(x+1) \cdot \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)}{(x+1) \cdot \sqrt{x+1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω ότι δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στην C_f στο $X_0 = -1$

π.χ. 6) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$

Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) την εφαπτόμενη της C_f στο $X_0 = -1$

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού: $A_f = (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$ και είναι συνεχής

$$\text{Ακόμα έχω } f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 5x + 4} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5x + 4}} \cdot (x^2 + 5x + 4)' \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x + 5}{2\sqrt{x^2 + 5x + 4}}, \quad x \in (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$$

Παρατηρώ ότι από τον τύπο της παράγωγου συνάρτησης δεν υπολογίζεται η $f'(-1)$

άρα θα ψάξω να βρω το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} =$

Παρατηρείστε ότι λόγω του πεδίου ορισμού :

$A_f = (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$ θα είναι $x \rightarrow -1 \Leftrightarrow x \rightarrow -1^+$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 4} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 4} \cdot \sqrt{x^2 + 5x + 4}}{(x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 5x + 4}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 5x + 4}{(x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 5x + 4}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1) \cdot (x+4)}{(x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 5x + 4}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+4) \cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5x + 4}} = 5 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη είναι η κατακόρυφη ευθεία (ε) : $x = -1$

π.χ. 7)

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 5, & x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$

Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) την εφαπτόμενη της C_f στο $X_0 = 1$

Λύση

Πρώτα ελέγχω αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Έχω: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 + 3x - 5) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2$

άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ άρα δεν είναι συνεχής η f στο $x_0 = 1$ άρα δεν ορίζεται εφαπτόμενη για την C_f στο $x_0 = 1$

Π.χ. 8) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^4}$
 Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 2$

Λύση

Προφανώς ο περιορισμός $(x-2)^4 \geq 0$ ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$ Άρα είναι $A_f = \mathbb{R}$

Ακόμα έχω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για να βρω την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 2$ θα προσπαθήσω πρώτα να βρω την παράγωγο τιμή της f στο $x_0 = 2$

Θυμήσου τις ιδιαιτερότητες
 στους κανόνες παραγώγισης

Η συνάρτηση γράφεται: $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^4} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{|x-2|^4} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-2)^4}, & x \geq 2 \\ \sqrt[3]{(2-x)^4}, & x < 2 \end{cases}$

Θα προσπαθήσω να υπολογίσω το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ για να δω αν υπάρχει η $f'(2)$

Έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^4} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^3 \cdot (x-2)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) \cdot \sqrt[3]{x-2}}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{x-2} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^4} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^3 \cdot (2-x)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x) \cdot \sqrt[3]{2-x}}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-\sqrt[3]{2-x}) = 0 \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω ότι $f'(2) = 0$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στον τύπο της εφαπτόμενης όπου $x_0 = 2$ έχω

$$(ε): y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 0 = 0 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη ευθεία (ε) είναι ο οριζόντιος άξονας $x'x$

Π.χ. 9) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$
 Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 2$

Λύση

Προφανώς ο περιορισμός $(x-2)^2 \geq 0$ ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$ Άρα είναι $A_f = \mathbb{R}$

Ακόμα έχω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για να βρω την εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 2$ θα προσπαθήσω πρώτα να βρω την παράγωγο τιμή της f στο $x_0 = 2$

Η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{|x-2|^2} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-2)^2}, & x \geq 2 \\ \sqrt[3]{(2-x)^2}, & x < 2 \end{cases}$$

Θα προσπαθήσω να υπολογίσω το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ για να δω αν υπάρχει η $f'(2)$

$$\text{Έχω: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} \cdot \sqrt[3]{x-2}}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^3}}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{x-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = +\infty \quad (1)$$

Όμως θα υπολογίσω και το άλλο
πλευρικό όριο για να δω αν
υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f

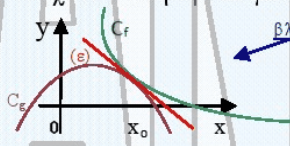
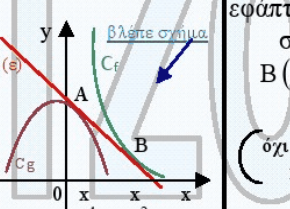
Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^2} \cdot \sqrt[3]{2-x}}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{(2-x)^3}}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{2-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2) \cdot \sqrt[3]{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{\sqrt[3]{2-x}} = -\infty \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω ότι υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0=2$ και είναι
η κατακόρυφη ευθεία (ϵ): $x = 0$

(β) περίπτωση: Αν δεν είναι γνωστό το σημείο επαφής τότε λέμε "έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής..." και εκμεταλευόμενοι τα δεδομένα βρίσκουμε το x_0 άρα και την εφαπτόμενη **ΙΣΧΥΟΥΝ**

Για δοσμένες ευθείες $(\epsilon_1): y = \lambda_1 x + \beta_1$, $(\epsilon_2): y = \lambda_2 x + \beta_2$ και $(\epsilon): y = \lambda x + \beta$ έχω			
$\epsilon_1 // \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$	$\epsilon_1 \perp \epsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$	Γωνία: $(\epsilon, \hat{0}x) = \hat{\omega} \Leftrightarrow \epsilon \hat{\omega} = \lambda$	
Το σημείο $A(\kappa, \rho) \in (\epsilon) \Leftrightarrow$ οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση της (ϵ) δηλ. έχω : $\rho = \lambda \cdot \kappa + \beta$			
Δύο γραμμές C_f και C_g εφάπτονται ή έχουν κοινή εφαπτόμενη στο x_0  βλέπε σχήμα	$\Leftrightarrow$	Οι δύο γραμμές περνούν από το ίδιο σημείο και έχουν την ίδια κλίση σ' αυτό το σημείο $\Leftrightarrow$	$f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$
Οι δύο γραμμές C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη όχι κατ' ανάγκη σε κοινό τους σημείο  βλέπε σχήμα	<u>α) σκέψη</u> Βρίσκω ποια από τις εφαπτόμενες της C_g στο σημείο $A(x_1, g(x_1))$, εφάπτεται στην C_f σε σημείο $B(x_2, f(x_2))$ (όχι κατ' ανάγκη $x_1 \neq x_2$)	<u>β) σκέψη</u> θα πρέπει η κλίση της C_g στο σημείο A, να είναι ίση με την κλίση της C_f στο σημείο B, (με $A \neq B$) και ίση με την κλίση του τμήματος AB Δηλ. πρέπει $g'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$ (με $x_2 \neq x_1$)	<u>γ) σκέψη</u> Πρέπει η εφαπτόμενη της C_g $\epsilon_1: y - g(x_1) = g'(x_1) \cdot (x - x_1) \Leftrightarrow y = g'(x_1) \cdot x - g'(x_1) \cdot x_1 + g(x_1)$ να ταυτίζεται με την εφ'ην της C_f $\epsilon_2: y = f'(x_2) \cdot x - f'(x_2) \cdot x_2 + f(x_2)$ Δηλ. πρέπει (1) $g'(x_1) = f'(x_2)$ και (2) $f(x_2) - f'(x_2) \cdot x_2 = g(x_1) - g'(x_1) \cdot x_1$ (όχι κατ' ανάγκη $x_2 \neq x_1$)

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ 1) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - x^2 + x + 3$. Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής της παράστασης που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\hat{\omega} = 45^\circ$

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε η εφαπτόμενη της C_f σ' αυτό το σημείο θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0) \Leftrightarrow \lambda = 3x_0^2 - 2x_0 + 1$ (1)

Ακόμα επειδή η ζητούμενη εφαπτόμενη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\hat{\omega} = 45^\circ$ θα έχω $\lambda = \tan \hat{\omega} \Leftrightarrow \lambda = \tan 45^\circ \Leftrightarrow \lambda = 1$ (2)

Από (1) και (2) θα έχω: $3x_0^2 - 2x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 \cdot (3x_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x_0 = 0}$ ή $\underline{x_0 = \frac{2}{3}}$

Αν $x_0 = 0$ Τότε το σημείο επαφής είναι το $(x_0, f(x_0)) = (0, f(0)) = (0, 3)$

Αντικαθιστώντας στον τύπο $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ έχω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη είναι η ευθεία με εξίσωση: $y = x + 3$

Αν $x_0 = \frac{2}{3}$ Τότε το σημείο επαφής είναι το $(x_0, f(x_0)) = (\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3})) = (\frac{2}{3}, \frac{95}{27})$

Αντικαθιστώντας στον τύπο $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ έχω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη είναι η ευθεία με εξίσωση: $y = x + \frac{77}{27}$

π.χ 2) α) Δείξτε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $A(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \neq 0$ έχει και άλλο κοινό σημείο με την C_f , το $B(\beta, f(\beta))$ στο οποίο η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια από την κλίση που έχει στο A .
β) Να βρεθεί η παραπάνω εφαπτόμενη αν γνωρίζουμε ότι σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο με εμβαδόν 54 τ.μ.

Λύση

α) Η συνάρτηση ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2, x \in \mathbb{R}$

Η εφαπτόμενη στο $A(\alpha, f(\alpha))$ δίνεται από την εξίσωση:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow y - \alpha^3 = 3\alpha^2 \cdot (x - \alpha) \quad \text{Άρα} \quad (\epsilon) \quad y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3$$

Για να βρω τα κοινά σημεία της C_f με την (ϵ) θα λύσω το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = x^3 \\ x^3 = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \end{array} \right\} y = x^3 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ y = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = x^3 \\ x^3 = 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \end{array} \right\} x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = 0 \quad (2)$$

Η (2) είναι εξίσωση 3^{ου} βαθμού ως προς άγνωστο το x και επειδή το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$

είναι το σημείο επαφής της (ε) με την C_f έχω ότι το $\chi = a$ επαληθεύει τις εξισώσεις και των δύο γραμμών άρα το $\chi = a$ είναι ρίζα της εξίσωσης. Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner έχω:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -3\alpha^2 & 2\alpha^3 & a \\ & \alpha & \alpha^2 & -2\alpha^3 & \\ \hline 1 & \alpha & -2\alpha^2 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα } (2) \Leftrightarrow (\chi - \alpha) \cdot (\chi^2 + \alpha\chi - 2\alpha^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = a \\ \chi^2 + \alpha\chi - 2\alpha^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = a \\ \chi = a \text{ ή } \chi = -2a \end{cases} \quad \text{Τελικά από (1) και (2) έχω ότι τα κοινά σημεία της εφαπτόμενης (ε)}$$

και της C_f είναι τα : $A(a, f(a)) = A(a, \alpha^3)$ και $B(-2a, f(-2a)) = B(-2a, -8\alpha^3)$

Η κλίση της C_f στο σημείο $A(a, \alpha^3)$ έχει τιμή: $\lambda_A = f'(\alpha) = 3\alpha^2$ (i)

Η κλίση της C_f στο σημείο $B(-2a, -8\alpha^3)$ έχει τιμή: $\lambda_B = f'(-2\alpha) = 12\alpha^2$ (ii)

Από (i) και (ii) έχω ότι $\lambda_B = 4\lambda_A$

β) Από το (α) ερώτημα έχω ότι η εφαπτόμενη της C_f στο $\chi_0 = a$ έχει εξίσωση: (ε) $y = 3\alpha^2\chi - 2\alpha^3$

Θέτοντας όπου $\chi = 0$ βρίσκω $y = -2\alpha^3$ Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $K(0, -2\alpha^3)$

Θέτοντας όπου $y = 0$ βρίσκω $\chi = \frac{2}{3}\alpha$ Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο $\Lambda(\frac{2}{3}\alpha, 0)$

Άρα το τρίγωνο που σχηματίζεται από την εφαπτόμενη (ε), τον άξονα $\chi'\chi$ και τον άξονα $y'y$ έχει κορυφές τα σημεία: $O(0,0)$, $K(0, -2\alpha^3)$ και $\Lambda(\frac{2}{3}\alpha, 0)$

Για το εμβαδόν $E_{OK\Lambda}$ του τριγώνου $\triangle OK\Lambda$ έχω: $E_{OK\Lambda} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{OK}, \vec{OL} \end{pmatrix} \right|$ όπου τα διανύσματα

$\vec{OK}(0, -2\alpha^3)$ και $\vec{OL}(\frac{2}{3}\alpha, 0)$ είναι οι πλευρές του τριγώνου. Επειδή από υπόθεση $E_{OK\Lambda} = 54$

$$\text{έχω: } \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{OK}, \vec{OL} \end{pmatrix} \right| = 54 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & -2\alpha^3 \\ \frac{2}{3}\alpha & 0 \end{vmatrix} \right| = 54 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| 0 + \frac{4}{3}\alpha^4 \right| = 54 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\alpha^4 = 54 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^4 = \frac{3 \cdot 54}{2} \Leftrightarrow \alpha^4 = 81 \Leftrightarrow \alpha = \pm 3$$

Για $a = 3$ έχω ότι το σημείο επαφής είναι το $A(3, 27)$ και εφαπτόμενη η : $y = 27\chi - 54$

Για $a = -3$ έχω ότι το σημείο επαφής είναι το $A(-3, -27)$ και εφαπτόμενη η : $y = 27\chi + 54$

π.χ 3) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε οι συναρτήσεις με τύπους : $f(x) = \frac{a}{x+1}$ και $g(x) = x^2 + \beta x$ να έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$

Λύση

Έχω ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{-1\}$ και ότι η συνάρτηση είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x) = \frac{-\alpha \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{-\alpha}{(x+1)^2}$

Ακόμα έχω ότι η g ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ και ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = (x^2 + \beta x)' = 2x + \beta \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα ορίζεται η εφαπτόμενη της C_f και της C_g στο $x_0 = 1$

Για να έχουν οι γραφικές παραστάσεις των f και g κοινή εφαπτόμενη στο $x_0 = 1$ θα πρέπει:

Οι δύο γραμμές να περνούν από το ίδιο σημείο και οι δύο γραμμές να έχουν την ίδια κλίση σ' αυτό το σημείο

$$\Delta\eta\lambda. \left\{ \begin{array}{l} f(1) = g(1) \\ \text{και} \\ f'(1) = g'(1) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha}{2} = 1 + \beta \\ \frac{-\alpha}{4} = 2 + \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2 + 2\beta \quad (1) \\ -\alpha = 8 + 4\beta \quad (2) \end{array} \right.$$

Από (1),(2) με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκω $\beta = \frac{-5}{3}$ και αντικαθιστώντας στην (1) έχω $\alpha = \frac{-4}{3}$

π.χ. 4) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - 5x + 10$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που περνούν από το σημείο $A(1, 2)$.

Λύση

Έχω $A_f = \mathbb{R}$ και ακόμα ότι η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο της.

Έστω $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε η εξίσωση της εφαπτόμενης σ' αυτό το σημείο

$$\begin{aligned} \text{θα είναι η: } y - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^2 + 5x_0 - 10 = (2x_0 - 5) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = (2x_0 - 5) \cdot x - x_0^2 + 10 \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή η εφαπτόμενη περνά από το σημείο $A(1, 2)$ έχω ότι οι συντεταγμένες $(1, 2)$

θα επαληθεύουν την (1) άρα θα έχω: $2 = (2x_0 - 5) \cdot 1 - x_0^2 + 10 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0$

Λύνοντας την τελευταία βρίσκω: $x_0 = -1$ ή $x_0 = 3$

Αν $x_0 = -1$ τότε το σημείο επαφής είναι το $B(-1, 16)$ και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκω ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι η: $y = -7x + 9$

Αν $x_0 = 3$ τότε το σημείο επαφής είναι το $B(3, 4)$ και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκω ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι η: $y = x + 1$

π.χ. 5) Να εξετάσετε αν κάποια από τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^2 + 1$ εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = x^2 + 4x - 1$. Στην περίπτωση που η απάντηση είναι καταφατική να γράψετε την εξίσωση της κοινής τους εφαπτόμενης.

Λύση

Τόσο η συνάρτηση f όσο και η συνάρτηση g ορίζονται $\forall x \in \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες με $f'(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) = 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η εφαπτόμενη των γραφικών τους παραστάσεων σε κάθε τους σημείο.

Η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο της, $A(x_1, f(x_1))$ δίνεται από την εξίσωση:

$$(ε) \quad y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) \Leftrightarrow y - x_1^2 - 1 = 2x_1 \cdot (x - x_1) \text{ άρα } (ε): y = 2x_1 \cdot x - x_1^2 + 1 \quad (I)$$

Θα ελέγξω αν κάποια από τις παραπάνω εφαπτόμενες (ε) της C_f εφάπτεται και στην C_g σε σημείο $B(x_2, g(x_2))$. Για να γίνεται αυτό θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Οι δύο γραμμές να} \\ \text{περνούν από το ίδιο} \\ \text{σημείο B} \text{ και} \\ \text{οι δύο γραμμές να} \\ \text{έχουν την ίδια κλίση} \\ \text{σ' αυτό το σημείο} \end{array} \right\} \Delta η λ \left\{ \begin{array}{l} \text{Η τιμή της (ε) για } x = x_2 \\ \text{να είναι ίση με την τιμή} \\ \text{της } g \text{ για } x = x_2 \text{ και} \\ \text{η κλίση της (ε) στο} \\ \text{σημείο B να είναι ίση με} \\ \text{την κλίση της } g \text{ στο B} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_1x_2 - x_1^2 + 1 = x_2^2 + 4x_2 - 1 \\ \lambda_{\varepsilon} = g'(x_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2 - 2 = 0 \\ 2x_1 = 2x_2 + 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - x_2)^2 + 4x_2 - 2 = 0 \quad (1) \\ x_1 = x_2 + 2 \quad (2) \end{array} \right.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) από τη σχέση (2) όπου $x_1 = x_2 + 2$ έχω: $2^2 + 4x_2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \text{ και άρα από (2) θα έχω } x_1 = \frac{3}{2}$$

Άρα η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1)) = A\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)$ εφάπτεται και της C_g στο

$$\text{σημείο } B(x_2, g(x_2)) = B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{4}\right)$$

Με αντικατάσταση στην (I) $y = 2x_1 \cdot x - x_1^2 + 1$ έχω ότι η κοινή τους εφαπτόμενη είναι η ευθεία

$$(ε) \quad y = 3x - \frac{5}{4}$$

π.χ. 6) Να εξετάσετε αν έχουν κοινές εφαπτόμενες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ και $g(x) = \frac{-1}{4}(9x^2 - 18x + 37)$.

Λύση

Τόσο η συνάρτηση f όσο και η συνάρτηση g ορίζονται $\forall x \in \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες με $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$, $x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) = \frac{-18}{4}(x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η εφαπτόμενη των γραφικών τους παραστάσεων σε κάθε τους σημείο.

Η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο της, $A(x_1, f(x_1))$ δίνεται από την εξίσωση:

$$(ε_1) \quad y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1) \Leftrightarrow y - 2x_1^3 - 3x_1^2 + 12x_1 = (6x_1^2 + 6x_1 - 12) \cdot (x - x_1)$$

$$\text{άρα } (\varepsilon_1): y = (6x_1^2 + 6x_1 - 12) \cdot x - 4x_1^3 - 3x_1^2 \quad (\text{I})$$

Η εφαπτόμενη της C_g σε κάθε σημείο της, $B(x_2, g(x_2))$ δίνεται από την εξίσωση:

$$(\varepsilon_2) \quad y - g(x_2) = g'(x_2) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow y + \frac{9}{4}x_2^2 - \frac{18}{4}x_2 + \frac{37}{4} = \left(\frac{-18}{4}x_2 + \frac{18}{4} \right) \cdot (x - x_2)$$

$$\text{άρα } (\varepsilon_2): y = \left(\frac{-18}{4}x_2 + \frac{18}{4} \right) \cdot x + \frac{9}{4}x_2^2 - \frac{37}{4} \quad (\text{II})$$

Για να έχουν κοινές εφαπτόμενες οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων θα πρέπει να υπάρχουν τιμές των x_1 και x_2 για τις οποίες οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) ταυτίζονται

$$\text{άρα από (I) και (II) θα πρέπει να ισχύει} \quad \begin{cases} 6x_1^2 + 6x_1 - 12 = \frac{-18}{4}x_2 + \frac{18}{4} \\ -4x_1^3 - 3x_1^2 = \frac{9}{4}x_2^2 - \frac{37}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{4x_1^2 + 4x_1 - 11}{3} \\ -16x_1^3 - 12x_1^2 = 9x_2^2 - 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{4x_1^2 + 4x_1 - 11}{3} \\ -16x_1^3 - 12x_1^2 = 9 \left(-\frac{4x_1^2 + 4x_1 - 11}{3} \right)^2 - 37 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{4x_1^2 + 4x_1 - 11}{3} \\ 4x_1^4 + 12x_1^3 - 15x_1^2 - 22x_1 + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{παραγοντοποιώντας} \\ \text{με τη βοήθεια του σχή-} \\ \text{ματος Horner έχω} \end{pmatrix} \begin{cases} x_2 = -\frac{4x_1^2 + 4x_1 - 11}{3} \\ (x_1 - 1)^2 \cdot (4x_1^2 + 20x_1 + 21) = 0 \end{cases}$$

Απ'όπου

$$\begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \rightarrow \text{στο σημείο } A(1, -7) \text{ τα δύο γραφήματα εφάπτονται (κοινή εφαπτόμενη)} \\ x_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{8}{3} \rightarrow \text{η εφαπτόμενη της } C_f \text{ στο } A_1\left(-\frac{3}{2}, 18\right) \text{ εφάπτεται της } C_g \text{ στο } B_1\left(\frac{8}{3}, -\frac{53}{4}\right) \\ x_1 = -\frac{7}{2} \Rightarrow x_2 = -8 \rightarrow \text{η εφαπτόμενη της } C_f \text{ στο } A_2\left(-\frac{7}{2}, -7\right) \text{ εφάπτεται της } C_g \text{ στο } B_2\left(-8, -\frac{757}{4}\right) \end{cases}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Η παραπάνω άσκηση δεν λύνεται με τη β) σκέψη (θα χάσουμε τη λύση $x_1 = x_2 = 1$)

π.χ. 7) Να βρεθούν οι αριθμοί α, β ώστε η εφαπτόμενη της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \alpha x$ στο σημείο $A(2, f(2))$ να εφάπτεται και στη συνάρτηση $g(x) = \beta x^2$ στο σημείο $B(1, g(1))$

Λύση

Τόσο η συνάρτηση f όσο και η συνάρτηση g ορίζονται $\forall x \in \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες με $f'(x) = 2x - \alpha$, $x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) = 2\beta x$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα ορίζεται η εφαπτόμενη των γραφικών τους παραστάσεων σε κάθε τους σημείο.

Για να είναι η ευθεία AB κοινή εφαπτόμενη των C_f και C_g θα πρέπει η κλίση της C_f στο σημείο A , να είναι ίση με την κλίση της C_g στο σημείο B , και ίση με την κλίση του τμήματος AB

$$\text{Δηλ. πρέπει} \quad f'(2) = g'(1) = \frac{f(2) - g(1)}{2 - 1} \Leftrightarrow 4 - \alpha = 2\beta = 4 - 2\alpha - \beta \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \alpha = 2\beta \\ 4 - \alpha = 4 - 2\alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{3}{4}$$

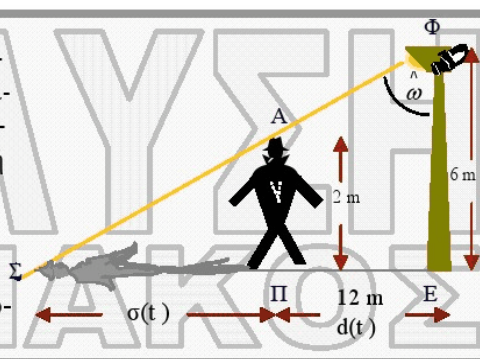
- 4) Για ασκήσεις που αναφέρονται στο ρυθμό μεταβολής (ή ταχύτητα μεταβολής) κάποιου μεγέθους.

Συνήθως χρειάζεται να εργαστούμε πάνω σε κάποιο γεωμετρικό σχήμα.

ΑΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ: ♥ Γράφω τον τύπο του μεγέθους του οποίου τον ρυθμό μεταβολής ζητώ.
(Αρκεί και μόνο μια ισότητα στην οποία συμμετέχει το μέγεθος.)
♥ Τα μεγέθη που αλλάζουν σε συνάρτηση με το χρόνο τα γράφω σαν συνάρτηση του χρόνου. (π.χ μια γωνία ω που αλλάζει με το χρόνο τη γράφω $\omega(t)$, ένα μήκος χ που αλλάζει με το χρόνο το γράφω $\chi(t)$ κ.λ.π.)
♥ Παραγωγίζω την σχέση **ΠΡΟΣΟΧΗ!** στην παραγωγή, υπάρχουν συνθέσεις !!

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ 1) Ένας άνδρας ύψους 2 m πλησιάζει ένα φανοστάτη με σταθερή ταχύτητα 0,2 m/s. (βλέπε διπλανό σχήμα.). Να βρείτε με ποιο ρυθμό αλλάζει το μήκος της σκιάς του τη χρονική στιγμή που απέχει από το φανοστάτη 12 m. Αν επιπλέον στην κορυφή του φανοστάτη υπάρχει κάμερα παρακολούθησης, να βρείτε με ποιο ρυθμό αλλάζει η οπτική γωνία $\hat{\omega}$ την ίδια χρονική στιγμή. Δίνεται: ύψος φανοστάτη 6 m



Λύση

Θυμήσου, από συμβουλές στις συναρτήσεις, ότι όταν δίνονται δύο σταθερά μήκη (εδώ τα ύψη του φανοστάτη και του άνδρα που δεν αλλάζουν στην πάροδο του χρόνου) ψάχνω για όμοια τρίγωνα.

Από τα όμοια τρίγωνα: $\triangle AΣΠ$ και $\triangle ΦΣΕ$ έχω: $\frac{ΣΠ}{ΣΕ} = \frac{ΠΑ}{ΦΕ}$ (1)

Το μήκος της σκιάς $ΣΠ$ και η απόσταση του πεζού από το φανοστάτη $ΠΕ$ αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Έστω $\sigma(t)$, $d(t)$ οι συναρτήσεις που δίνουν το μήκος $ΣΠ$ και την απόσταση $ΠΕ$ κάθε χρονική στιγμή t . Ακόμα έχω ότι το ύψος του άνδρα είναι $ΠΑ = 2$ και το ύψος του φανοστάτη είναι $ΕΦ = 6$. Έτσι λοιπόν αντικαθιστώντας στη σχέση (1) θα έχω

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma(t) + d(t)} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow 3\sigma(t) = \sigma(t) + d(t) \Leftrightarrow 2\sigma(t) = d(t) \Leftrightarrow \sigma(t) = \frac{1}{2}d(t) \quad (2)$$

παραγωγίζοντας τη σχέση (2) έχω: $\sigma'(t) = \frac{1}{2}d'(t)$ (3) κάθε χρονική στιγμή t Όμως

τη χρονική στιγμή t_0 (αλλά και κάθε χρονική στιγμή) έχω ότι ο άνδρας πλησιάζει το φανοστάτη με ταχύτητα 0.2m/s Άρα έχω $d'(t_0) = -0,2$ έχω αρνητικό πρόσημο επειδή η απόσταση d μικραίνει

Από την σχέση (3) έχω $\sigma'(t_0) = \frac{1}{2}d'(t_0) \Leftrightarrow \sigma'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot (-0,2) \Leftrightarrow \sigma'(t_0) = -0,1 \text{ m/s}$

Άρα το μήκος της σκιάς μικραίνει με ταχύτητα $0,1 \text{ m/s}$

Για να υπολογίσω τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει η γωνία $\hat{\omega}$ (γωνιακή ταχύτητα) εργάζομαι στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ΣΕΦ$ και έχω $\epsilon\phi \hat{\omega} = \frac{ΣΕ}{ΦΕ} \Leftrightarrow \epsilon\phi \omega(t) = \frac{\sigma(t) + d(t)}{6} \Leftrightarrow$

$6 \cdot \epsilon\phi \omega(t) = \sigma(t) + d(t)$ και παραγωγίζοντας έχω:

$$(6\epsilon\phi \omega(t))' = (\sigma(t) + d(t))' \Leftrightarrow \frac{6(\omega(t))'}{\sin^2 \omega(t)} = \sigma'(t) + d'(t) \Leftrightarrow 6\omega'(t) = \sin^2 \omega(t) \cdot (\sigma'(t) + d'(t)) \quad (A)$$

Ακόμα από το ίδιο ορθογώνιο τρίγωνο έχω $\sin \hat{\omega} = \frac{\Phi E}{\Sigma \Phi} \Leftrightarrow \sin^2 \hat{\omega} = \frac{(\Phi E)^2}{(\Sigma \Phi)^2} \Leftrightarrow$

$$\sin^2 \hat{\omega} = \frac{(6)^2}{(\Sigma E)^2 + (\Phi E)^2} \quad \text{άρα} \quad \sin^2 \omega(t) = \frac{36}{(\sigma(t) + d(t))^2 + 36} \quad \text{Αντικαθιστώντας}$$

λοιπόν στην (Α) έχω $6\omega'(t) = \frac{36}{(\sigma(t) + d(t))^2 + 36} \cdot (\sigma'(t) + d'(t))$. Άρα τη χρονική

$$\text{στιγμή } t_0 \text{ θα έχω} \quad \omega'(t_0) = \frac{6}{(\sigma(t_0) + d(t_0))^2 + 36} \cdot (\sigma'(t_0) + d'(t_0)). \quad (B) \quad \text{Τα άγνωστα}$$

μεγέθη αυτής της ισότητας είναι το ζητούμενο $\omega'(t_0)$ και το $\sigma(t_0)$. Από την ισό-

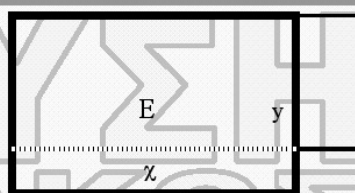
τητα (2) αντικαθιστώντας όπου $t = t_0$ έχω $\sigma(t_0) = \frac{1}{2}d(t_0)$ και γνωρίζοντας ότι τη χρονι-

κή στιγμή t_0 η απόσταση ΠΕ είναι 12 m έχω $d(t_0) = 12$ άρα από (2) έχω $\sigma(t_0) = 6$.

$$\text{Έτσι λοιπόν από (B) έχω} \quad \omega'(t_0) = \frac{6}{(6+12)^2 + 36} \cdot (-0,1 - 0,2) \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{6}{360} \cdot (-0,3) \Leftrightarrow$$

$$\omega'(t_0) = -0,05. \quad \text{Άρα η γωνία } \hat{\omega} \text{ μικραίνει με ρυθμό } 0,05 \text{ rad/sec}$$

Π.Χ. 2) Ελαστικής επίπεδης μεμβράνης σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου οι διαστάσεις χ , y μεταβάλλονται ως εξής: το μήκος χ αυξάνεται με ταχύτητα 4 mm/s ενώ το πλάτος y ελαττώνεται με ρυθμό 6 mm/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή που οι διαστάσεις του είναι: $\chi = 1,5$ cm και $y = 24$ mm.



Λύση

Έστω $\chi(t)$ και $y(t)$ οι συναρτήσεις που δίνουν τα μήκη των διαστάσεων χ και y σε συνάρτηση με το χρόνο. Έστω ακόμα $E(t)$ η συνάρτηση που δίνει το εμβαδό.

Θα ισχύει $E(t) = \chi(t) \cdot y(t)$ και παραγωγίζοντας θα έχω: $E'(t) = \chi'(t) \cdot y(t) + \chi(t) \cdot y'(t)$ (Α)

Για τη χρονική στιγμή t_0 έχω ότι το μήκος χ αυξάνεται με ρυθμό 4 mm/s άρα $\chi'(t) = 4$ και ότι το πλάτος y ελαττώνεται με ρυθμό 6 mm/s άρα $y'(t) = -6$. Ακόμα έχω ότι $\chi = 1,5$ cm $\Leftrightarrow \chi = 15$ mm και $y = 24$ mm άρα $\chi(t_0) = 15$ και $y(t_0) = 24$. Αντικαθιστώντας στην (Α) έχω $E'(t_0) = \chi'(t_0) \cdot y(t_0) + \chi(t_0) \cdot y'(t_0) \Leftrightarrow E'(t_0) = 4 \cdot 24 + 15 \cdot (-6) \Leftrightarrow E'(t_0) = 6$.

Άρα το εμβαδό της μεμβράνης αυξάνει με ταχύτητα 6 mm²/s

Π.Χ. 3) Σε μπάλα θαλάσσης παρέχουμε αέρα με σταθερό ρυθμό 5 cm³/s. Τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα της είναι 20 cm, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνουν η ακτίνα και η επιφάνεια της. (Δίνονται οι τύποι: Επιφάνεια σφαίρας $E = 4\pi r^2$ και Όγκος σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ όπου r η ακτίνα της)

Λύση

Προφανώς τα μεγέθη που αλλάζουν με το χρόνο είναι η ακτίνα r ο όγκος V και η επιφάνεια E της σφαίρας και έστω $r(t)$, $V(t)$ και $E(t)$ οι αντίστοιχες συναρτήσεις τους.

Θα έχω: $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$ (1) και $E(t) = 4\pi r^2(t)$ (2). Ακόμα έχω $V'(t) = 5$ και $r(t_0) = 20$

Παραγωγίζοντας την (1) έχω: $V'(t) = \frac{4}{3}\pi(r^3(t))' \Rightarrow V'(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2(t) \cdot r'(t) \Rightarrow$

$$V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t) \Rightarrow r'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi r^2(t)} \quad (3) \quad \text{Άρα τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ θα είναι}$$

$$r'(t_0) = \frac{V'(t_0)}{4\pi r^2(t_0)} \Rightarrow r'(t_0) = \frac{5}{4\pi(20)^2} \Rightarrow r'(t_0) = \frac{1}{320\pi}. \quad \text{Άρα τη ζητούμενη χρονική}$$

$$\text{στιγμή η ακτίνα της μπάλας αυξάνει με ρυθμό } \frac{1}{320\pi} \text{ cm/sec} \quad (3)$$

Παραγωγίζοντας την (2) έχω $E'(t) = 4\pi(r^2(t))' \Rightarrow E'(t) = 4\pi \cdot 2r(t)r'(t) \Leftrightarrow$

$$E'(t) = 8\pi r(t) \frac{V'(t)}{4\pi r^2(t)} \Leftrightarrow E'(t) = 2 \frac{V'(t)}{r(t)}. \quad \text{Άρα τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ θα είναι}$$

$$E'(t_0) = 2 \cdot \frac{V'(t_0)}{r(t_0)} \Leftrightarrow E'(t_0) = 2 \cdot \frac{5}{20} \Leftrightarrow E'(t_0) = \frac{1}{2}. \quad \text{Άρα τη ζητούμενη χρονική στιγμή}$$

το εμβαδόν της επιφάνειας της μπάλας αυξάνει με ρυθμό $0,5 \text{ cm}^2/\text{sec}$

5) Για ασκήσεις που αναφέρονται σε ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ μιας συνάρτησης

5₁) Ζητούν να βρεθούν η μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης f

Βήματα: (α) βρίσκω το πεδίο ορισμού A_f και ελέγχω την συνέχειά της για κάθε $x \in A_f$

(β) υπολογίζω την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ όπου αυτή ορίζεται

(γ) κάνω πίνακα προσήμων της $f'(x)$ από τον οποίο βρίσκω τη μονοτονία και τα ακρότατα της f

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ 1) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις:

$$\text{i) } f(x) = x \cdot \ln x \quad \text{ii) } g(x) = -\frac{2x^3}{x^2 - 1} \quad \text{iii) } h(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 2 \\ -x^3 + 3x + 4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{iv) } k(x) = x^{\ln x} \quad \text{v) } \tau(x) = x \cdot \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x, \quad -\pi < x \leq \pi \quad \text{vi) } \phi(x) = x \sqrt{1 - x^2}$$

Λύση

i) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x > 0$ άρα το πεδίο ορισμού της είναι το $A_f = (0, +\infty)$

στο οποίο η f είναι συνεχής ως γινόμενο των συνεχών x και $\ln x$

$$\text{Έχω } f'(x) = (x \cdot \ln x)' \Rightarrow f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \quad \text{άρα} \quad f'(x) = \ln x + 1, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του προσήμου της f' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της f και τα ακρότατά της

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Άρα θα έχω:

$f \searrow$ για $x \in (0, \frac{1}{e}]$

$f \nearrow$ για $x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$ και ότι η f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο :

$$A(\frac{1}{e}, f(\frac{1}{e})) = (\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$$

Θυμήσου ότι όταν $f'(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ τότε $f \nearrow$ σ' όλο το διάστημα Δ (ακόμα και κλειστό) και ότι όταν $f'(x) < 0$ για κάθε x που ανήκει στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ τότε $f \searrow$ σ' όλο το διάστημα Δ . Ακόμα θυμήσου ότι η f παρουσιάζει ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο κατά περίπτωση), στα σημεία του πεδίου ορισμού A_f , που αλλάζει η μονοτονία (δηλ. τα πρόσημα της $f'(x)$), καθώς και στα κλειστά άκρα των διαστημάτων που ορίζουν το A_f και από τα οποία η f ξεκινά φθίνουσα ή αύξουσα.

ii) Η g ορίζεται όταν $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$ Άρα πεδίο ορισμού της g το: $A_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Η g είναι συνεχής στο A_g ως ρητή και παραγωγίσιμη με $g'(x) = -\frac{(2x^3)' \cdot (x^2 - 1) - 2x^3 \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}$

$$\text{Άρα } g'(x) = -\frac{6x^2 \cdot (x^2 - 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow g'(x) = -\frac{2x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του προσήμου της g' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της g και τα ακρότατά της

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+	0	+	-
$g(x)$							

Άρα θα έχω: $g \searrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}, +\infty)$ και $g \nearrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $[-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3}]$

Ακόμα έχω ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $A(-\sqrt{3}, g(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$

και τοπικό μέγιστο στο σημείο $B(\sqrt{3}, g(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$

iii) Πρώτα ελέγχω αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Για $x < 2$ έχω $h(x) = x^2 - x$ άρα συνεχής ως πολωνυμική

Για $x > 2$ έχω $h(x) = -x^3 + 3x + 4$ επίσης συνεχής ως πολωνυμική

Θα ελέγξω τη συνέχεια στο $x_0 = 2$

Έχω $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^3 + 3x + 4) = 2$ και $h(2) = 2$ άρα η h

είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$ άρα είναι συνεχής σ' όλο το πεδίο ορισμού της (δηλ. το $\mathbb{R}$)

Ως προς την παραγωγισιμότητα έχω: για $x < 2$ $h'(x) = (x^2 - x)' \Rightarrow h'(x) = 2x - 1$

για $x > 2$ $h'(x) = (-x^3 + 3x + 4)' \Rightarrow h'(x) = -3x^2 + 3$

Στο $x_0 = 2$ έχω: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = 3$ (A)

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^3 + 3x + 4 - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x - 2)(x + 1)^2}{x - 2} = -9$ (B)

Από (A) και (B) έχω ότι δεν υπάρχει η $h'(2)$

Άρα $h'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 2 \\ -3x^2 + 3, & x > 2 \end{cases}$

Από τον παρακάτω πίνακα προσήμων της $h'(x)$

βρίσκω τη μονοτονία και τα ακρότατά της h

x	$-\infty$	$1/2$	2	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	-
$h(x)$				

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το ότι δεν υπάρχει η $h'(2)$ δεν επηρεάζει την εύρεση της μονοτονίας και των ακροτάτων αφού το πρόσημο της $h'(x)$ σε ανοικτό διάστημα, δίνει τη μονοτονία στο αντίστοιχο κλειστό, και τα ακρότατα βρίσκονται στα σημεία που αλλάζει πρόσημο η $h'(x)$. Όμως προτείνω να βρίσκετε την παράγωγο, οπουδήποτε αυτή ορίζεται, αφού ακόμα δεν έχετε την εμπειρία για το πού χρειάζεται να βρεθεί και πού δε χρειάζεται (έτσι θα φτιάχνω σωστό πίνακα)

Επειδή ίσως να δυσκολεύεται κάποιος να γράψει αμέσως σε ένα πίνακα τα πρόσημα μιας δίκλαδης συνάρτησης μπορεί να κάνει τα πρόσημα κάθε κλάδου ξεχωριστά σε δύο πίνακες και μετά να τους συνενώσει. Για την συγκεκριμένη $h'(x)$

Για $x < 2$ $h'(x) = 2x - 1$ Για $x > 2$ $h'(x) = -3x^2 + 3$

x	$-\infty$	$1/2$	2	$+\infty$	x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	-	$h'(x)$	-	+	0	+	-

Άρα θα έχω:

$h \searrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1/2]$, $[2, +\infty)$ και $h \nearrow$ στο διάστημα $[1/2, 2]$

Ακόμα έχω ότι η h παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $A(1/2, h(1/2)) = (1/2, -1/4)$ και τοπικό μέγιστο στο σημείο $B(2, h(2)) = (2, 2)$

iv) Η συνάρτηση k ορίζεται για $x \in (0, +\infty)$ άρα $A_k = (0, +\infty)$.

Ακόμα η συνάρτηση ισοδύναμα γράφεται $k(x) = e^{\ln x \cdot \ln x} \Leftrightarrow k(x) = e^{\ln^2 x}$ και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\ln x$, x^2 και e^x , και παραγωγίσιμη με $k'(x) = (e^{\ln^2 x})' \Rightarrow k'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' \Rightarrow k'(x) = x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)' \Rightarrow$

$$k'(x) = x^{\ln x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \quad \text{Άρα } k'(x) = 2 \cdot x^{\ln x - 1} \cdot \ln x, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x^{\ln x - 1} \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$k'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x^{\ln x - 1} \cdot \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad (\text{αφού έχω } x^{\ln x - 1} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty))$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του προσήμου της k' , μπορούμε εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της k και τα ακρότατά της.

x	0	1	$+\infty$
$k'(x)$	—	0	+
$k(x)$	↘		↗

Άρα θα έχω:

k ↘ για $x \in (0, 1]$

k ↗ για $x \in [1, +\infty)$ και ότι η k παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο :

$$A(1, k(1)) = (1, 1)$$

v) Η συνάρτηση τ είναι συνεχής στο $(-\pi, \pi]$, όπου είναι ορισμένη, και παραγωγίσιμη με

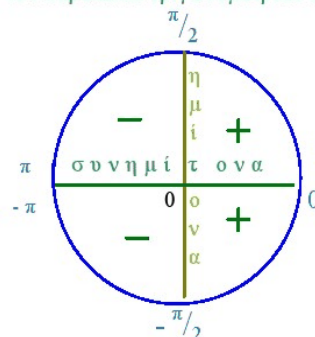
$$\tau'(x) = (x \cdot \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x)' \Rightarrow \tau'(x) = \eta \mu x + x \cdot \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x. \text{ Άρα } \tau'(x) = x \cdot \sigma \upsilon \nu x, x \in (-\pi, \pi]$$

$$\tau'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \sigma \upsilon \nu x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \sigma \upsilon \nu x = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{Αφού } x \in (-\pi, \pi])$$

Για να βρω πως μεταβάλλονται τα πρόσημα της $\tau'(x)$ φτιάχνω πίνακα όπου φαίνονται τα πρόσημα των παραγόντων της $\tau'(x)$

χ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π			
χ	—	—	0	+	+			
$\sigma\nu\nu\chi$	—	0	+	+	0	—		
$\tau'(\chi)$	+	0	—	0	+	0	—	
$\tau(\chi)$								

Τα πρόσημα του $\sigma \upsilon \nu x$ τα βρίσκουμε εύκολα από τον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο



Άρα θα έχω: τ ↗ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi, -\frac{\pi}{2}]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ και τ ↘ σε καθένα από τα διαστήματα $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

Ακόμα έχω ότι η τ παρουσιάζει δύο τοπικά μέγιστα, το ένα στο σημείο $A(-\frac{\pi}{2}, \tau(-\frac{\pi}{2})) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και το άλλο στο σημείο $B(\frac{\pi}{2}, \tau(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, και δύο τοπικά ελάχιστα, το ένα στο σημείο $\Gamma(0, \tau(0)) = (0, 1)$ και το άλλο στο σημείο $\Delta(\pi, \tau(\pi)) = (\pi, 1)$

vi) Για να ορίζεται η ϕ πρέπει $1 - \chi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \in [-1, 1]$. Άρα $A_\phi = [-1, 1]$ στο οποίο η συνάρτηση είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών. Για την παράγωγό της έχω:

$$\phi'(\chi) = \left(\chi \cdot \sqrt{1 - \chi^2} \right)' \Rightarrow \phi'(\chi) = \sqrt{1 - \chi^2} + \chi \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \chi^2}} \cdot (1 - \chi^2)' \Rightarrow \phi'(\chi) = \sqrt{1 - \chi^2} - \frac{\chi^2}{\sqrt{1 - \chi^2}} \Rightarrow$$

$$\phi'(\chi) = \frac{(\sqrt{1 - \chi^2})^2 - \chi^2}{\sqrt{1 - \chi^2}} \Rightarrow \phi'(\chi) = \frac{1 - 2\chi^2}{\sqrt{1 - \chi^2}}, \quad \chi \in (-1, 1)$$

$$\phi'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\chi^2}{\sqrt{1 - \chi^2}} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\chi^2 = 0 \Leftrightarrow \chi = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi'(\chi) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\chi^2}{\sqrt{1 - \chi^2}} > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\chi^2 > 0 \Leftrightarrow \chi \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Αφού } \sqrt{1 - \chi^2} > 0 \\ \forall \chi \in (-1, 1) \end{array} \right)$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του προσήμου της ϕ' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της ϕ και τα ακρότατά της.

χ	-1	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	
$\phi'(x)$	-	0	+	0	-
$\phi(x)$					

Άρα θα έχω:

ϕ $\nearrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, -\sqrt{2}/2]$, $[\sqrt{2}/2, 1]$ και ϕ $\nwarrow$ στο διάστημα $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$

Ακόμα έχω ότι η ϕ παρουσιάζει δύο τοπικά μέγιστα, το ένα στο σημείο $A(-1, \phi(-1)) = (-1, 0)$ και το άλλο στο σημείο $B(\sqrt{2}/2, \phi(\sqrt{2}/2)) = (\sqrt{2}/2, 1/2)$, και δύο τοπικά ελάχιστα, το ένα στο σημείο $\Gamma(-\sqrt{2}/2, \phi(-\sqrt{2}/2)) = (-\sqrt{2}/2, -1/2)$ και το άλλο στο σημείο $\Delta(1, \phi(1)) = (1, 0)$

52) Ζητούν να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης f

Βήματα: (α) βρίσκω το πεδίο ορισμού A_f και ελέγχω την συνέχειά της για κάθε $x \in A_f$

(β) βρίσκω τα διαστήματα μονοτονίας της f

(γ) για κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα βρίσκω το αντίστοιχο σύνολο τιμών σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα (από το κεφάλαιο της συνέχειας)

Αν f $\nwarrow$ και συνεχής στα διαστήματα $\Delta_1 = (\kappa, \lambda)$, $\Delta_2 = (\kappa, \nu]$, $\Delta_3 = [\rho, \nu]$, $\Delta_4 = [\rho, \lambda)$ τα οποία συνθέτουν το πεδίο ορισμού της, τότε θα έχω:

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow \kappa^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \lambda^-} f(x) \right),$$

$$f(\Delta_2) = \left[\lim_{x \rightarrow \kappa^+} f(x), f(\nu) \right], f(\Delta_3) = [f(\rho), f(\nu)] \text{ και } f(\Delta_4) = \left[f(\rho), \lim_{x \rightarrow \lambda^-} f(x) \right]$$

όπου $\rho, \nu \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R} + \{-\infty\}$, $\lambda \in \mathbb{R} + \{+\infty\}$

Αντίστοιχα αν f $\nearrow$, τότε θα έχω:

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow \kappa^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \lambda^-} f(x) \right),$$

$$f(\Delta_2) = \left[f(\nu), \lim_{x \rightarrow \kappa^+} f(x) \right], f(\Delta_3) = [f(\nu), f(\rho)] \text{ και } f(\Delta_4) = \left(\lim_{x \rightarrow \lambda^-} f(x), f(\rho) \right]$$

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ 1) Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων

$$(i) f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (ii) g(x) = \frac{\chi^4 + 3\chi^3 - 3\chi^2 - 9\chi}{\chi + 3} \quad (iii) h(\chi) = \begin{cases} \chi^2, \chi \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \\ 4(\chi - 1), \chi \in (-1, 2) \end{cases}$$

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = \mathbb{R}^*$, στο οποίο η f είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\chi + \frac{1}{\chi} \right)' \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{\chi^2}$ Άρα $f'(x) = \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2}, \chi \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2} = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \chi = \pm 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\chi^2 - 1}{\chi^2} > 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \chi \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad (\text{Αφού } \chi^2 > 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^*)$$

Από τον παρακάτω πίνακα μεταβολής των προσήμων της $f'(x)$ βρίσκω τη μονοτονία της f

χ	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$+\infty$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Έχω: $f \nearrow$ στο $[-1, 0)$ και $(0, 1]$
 $f \searrow$ στο $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$
 $f(-1) = -2$ και $f(1) = 2$ ακόμα
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Άρα, όπως φαίνεται από την τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα, το σύνολο τιμών της f θα προκύψει από την ένωση των διαστημάτων $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$ Άρα το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

ii) Το πεδίο ορισμού της g είναι $A_g = \mathbb{R} - \{-3\}$, στο οποίο η g είναι συνεχής ως ρητή.

Η g ισοδύναμα γράφεται:

$$g(x) = \frac{(\chi^3 - 3\chi) \cdot (\chi + 3)}{\chi + 3} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \chi^3 - 3\chi, \chi \in \mathbb{R} - \{-3\}.$$

$$g'(x) = (\chi^3 - 3\chi)' \quad \text{Άρα } g'(x) = 3\chi^2 - 3, \chi \in \mathbb{R} - \{-3\}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\chi^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \chi = \pm 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (\chi^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \chi \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (1, +\infty)$$

Από τον παρακάτω πίνακα μεταβολής των προσήμων της $g'(x)$ βρίσκω τη μονοτονία της g

χ	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow -18$	$\nwarrow 2$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$	

Έχω: $g \nearrow$ στο $[-1, 1]$ και
 $g \searrow$ στο $(-\infty, -3), (-3, -1], [1, +\infty)$
και $g(-1) = 2, g(1) = -2$ ακόμα
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = -18$
 $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = -18, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Παρατήρησα ότι το -3 (δηλ. η ρίζα του παρονομαστή) είναι και ρίζα του αριθμητή. Άρα το $(\chi + 3)$ είναι παράγοντας του αριθμητή, οπότε παραγοντοποιώντας τον (με σχήμα Horner) μπόρεσα να απλοποιήσω την $g(x)$

Από την τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι το σύνολο τιμών της g είναι η ένωση των διαστημάτων $(-\infty, -18)$, $(-18, 2]$, $[-2, 2]$, $[-2, +\infty)$
 Άρα $g(A) = (-\infty, -18) \cup (-18, +\infty) = \mathbb{R} - \{-18\}$

iii) Για $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ $h(x) = x^2$, συνεχής ως πολυωνυμική

Για $x \in (-1, 2)$ $h(x) = 4(x-1)$ συνεχής επίσης ως πολυωνυμική

Θα ελέγξω τη συνέχεια στο $x_0 = -1$ και στο $x_0 = 2$

Έχω $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 4(x-1) = -8$ Άρα $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$

Άρα η h δεν είναι συνεχής στο $x_0 = -1$

Έχω $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 4(x-1) = 4$ και $h(2) = 4$ Άρα έχω

$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = h(2)$ Άρα η h είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ Τελικά η h είναι

συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Για την παράγωγο της h έχω Για $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ $h'(x) = (x^2)'$ Άρα $h'(x) = 2x$

Για $x \in (-1, 2)$ $h'(x) = (4x-4)'$ Άρα $h'(x) = 4$

Στο $x_0 = -1$ δεν είναι παραγωγίσιμη αφού δεν είναι συνεχής

Στο $x_0 = 2$ έχω $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4(x-1)-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4(x-2)}{x-2} = 4$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x-2} = 4$

Άρα $h'(2) = 4$

Άρα $h'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-\infty, -1) \cup [2, +\infty) \\ 4, & x \in (-1, 2) \end{cases}$

Υπενθυμίζω ότι για την εύρεση των διαστημάτων μονοτονίας δεν ήταν ανάγκη να υπάρχει (και άρα να βρεθεί) η $h'(2)$ όμως υπολογίζοντάς την θα έχω σωστό πίνακα

(εξάλλου, αν είστε βιαστικοί θυμηθείτε την ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ στην σελ. 5)

Από τον παρακάτω πίνακα μεταβολής των πρόσημων της h' βρίσκω τη μονοτονία της h

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$h'(x)$		-	+	+
$h(x)$	$+\infty$	1	4	$+\infty$

Άρα έχω $h \nearrow$ στο $(-\infty, -1]$

$h \nwarrow$ στο $(-1, +\infty)$ και

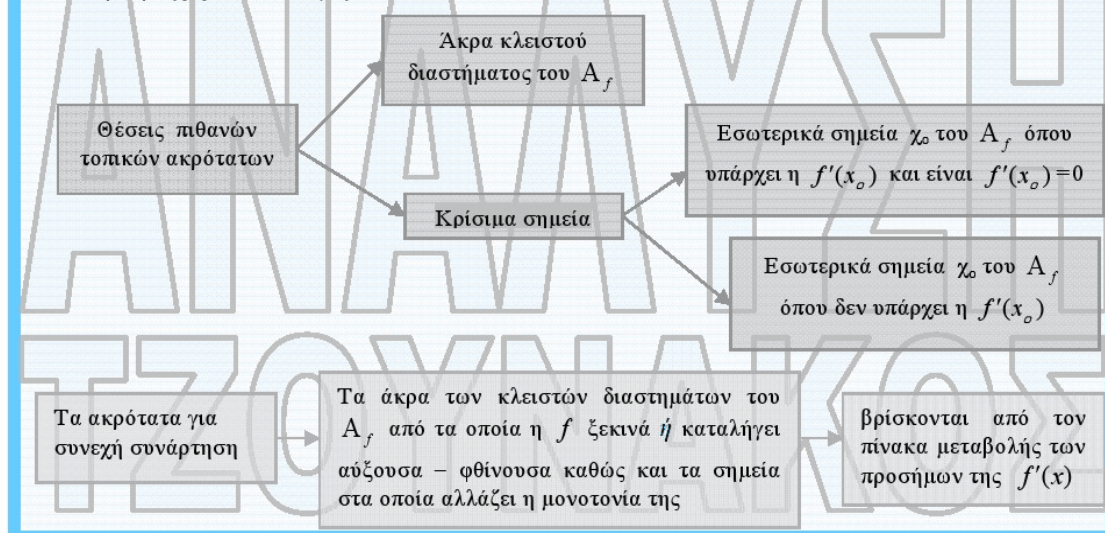
$h(-1) = 1$ ακόμα $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = -8$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

Από την τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι το σύνολο τιμών της h είναι η ένωση των διαστημάτων $[1, +\infty)$, $(-8, +\infty)$ Άρα $g(A) = (-8, +\infty)$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ! Στο παραπάνω παράδειγμα η h ήταν συνεχής και στο $x_0 = 2$ (σημείο αλλαγής του τύπου της) και είχε το ίδιο είδος μονοτονίας ($\nwarrow$) σε καθένα από τα επιμέρους διαστήματα $(-1, 2)$ και $[2, +\infty)$, οπότε είπαμε ότι η h είναι γνήσια αύξουσα στο $(-1, +\infty)$ και βρήκαμε ως αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-8, +\infty)$. Αν όμως η h δεν ήταν συνεχής στο $x_0 = 2$ τότε θα αναφέραμε ξεχωριστά τη μονοτονία για καθένα από τα επιμέρους διαστήματα $(-1, 2)$ και $[2, +\infty)$ (ακόμα κι αν ήταν το ίδιο είδος) και ως σύνολο τιμών θα παίρναμε την ένωση των επιμέρους - αντίστοιχων των $(-1, 2)$ και $[2, +\infty)$ - συνόλων τιμών.

5₃) Ζητούν να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία ή τα πιθανά ακρότατα ή τα ακρότατα μιας συνάρτησης f τότε θυμήσου (για συνεχή συνάρτηση):



παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 5, & x \in (-\infty, 0] \\ -x + 5, & x \in (0, 1] \\ x^3 - 12x + 15, & x \in (1, 3] \end{cases}$$

Να βρείτε: (α) τα κρίσιμα σημεία της
(β) τα πιθανά ακρότατά της
(γ) τα ακρότατά της

Λύση

Πρώτα ελέγχω αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της .

Για $x < 0$ έχω $f(x) = x^2 + x + 5$ άρα συνεχής ως πολυωνυμική

Για $x \in (0, 1)$ έχω $f(x) = -x + 5$ συνεχής ως πολυωνυμική

Για $x \in (1, 3]$ έχω $f(x) = x^3 - 12x + 15$ επίσης συνεχής ως πολυωνυμική

Θα ελέγξω τη συνέχεια στο $x_0 = 0$ και στο $x_1 = 1$

$$\text{Έχω } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x + 5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 5) = 5 \\ f(0) &= 5 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5 = f(0) \text{ Άρα είναι συνεχής στο } x_0 = 0$$

$$\text{Έχω } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 5) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - 12x + 15) = 4 \\ f(1) &= 4 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 = f(1) \text{ Άρα είναι συνεχής στο } x_0 = 1$$

Τελικά έχω ότι η f είναι συνεχής σ' όλο το πεδίο ορισμού της $A_f = (-\infty, 3]$

Ελέγχω την παραγωγισιμότητα της

Για $\chi < 0$ έχω $f'(x) = (\chi^2 + \chi + 5)' \Rightarrow f'(x) = 2\chi + 1$

Για $\chi \in (0, 1)$ έχω $f'(x) = (-\chi + 5)' \Rightarrow f'(x) = -1$

Για $\chi \in (1, 3]$ έχω $f'(x) = (\chi^3 - 12\chi + 15)' \Rightarrow f'(x) = 3\chi^2 - 12$

Ελέγχω την παραγωγισιμότητα της f στο $\chi_0 = 0$ και στο $\chi_1 = 1$

$$\text{Έχω } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\chi^2 + \chi + 5 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\chi \cdot (\chi + 1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\chi + 5 - 5}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\chi}{x} = -1$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ άρα δεν είναι παραγωγίσιμη η f στο $\chi_0 = 0$

Άρα το σημείο $K(0, f(0)) = (0, 5)$ είναι κρίσιμο σημείο

Για το $\chi_1 = 1$ έχω $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\chi + 5 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\chi + 1}{x - 1} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\chi^3 - 12\chi + 15 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\chi - 1) \cdot (\chi^2 + \chi - 11)}{x - 1} = -9$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ άρα δεν είναι παραγωγίσιμη η f στο $\chi_1 = 1$

Άρα και το σημείο $\Lambda(1, f(1)) = (1, 4)$ είναι κρίσιμο σημείο

$$\text{Τελικά } f'(x) = \begin{cases} 2\chi + 1 & , \chi < 0 \\ -1 & , \chi \in (0, 1) \\ 3\chi^2 - 12 & , \chi \in (1, 3] \end{cases}$$

Θα βρω τα εσωτερικά σημεία $\chi \in A_f$ για τα οποία ισχύει $f'(x) = 0$

Για $\chi < 0$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow \chi = -\frac{1}{2}$

Άρα και το σημείο $M(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ είναι κρίσιμο σημείο

Προφανώς δεν υπάρχει κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(0, 1)$ (Αφού $f'(x) = -1 \neq 0$)

Για $\chi \in (1, 3)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\chi^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \chi = 2$ ή $\chi = -2$

Η τιμή $\chi = -2$ απορρίπτεται αφού $-2 \notin (1, 3)$

Άρα και το σημείο $N(2, f(2)) = (2, 1)$ είναι κρίσιμο σημείο

Τελικά τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα: $K(0, 5)$, $\Lambda(1, 4)$, $M(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ και $N(2, 1)$

Πιθανά ακρότατα της f είναι τα σημεία: $K(0, 5)$, $\Lambda(1, 4)$, $M(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $N(2, 1)$

καθώς και το σημείο $P(3, f(3)) = (3, 6)$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $f'(x)$, μπορώ

εύκολα να βρω τα ακρότατα της f .

χ	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	
$f'(x)$	-	0	+	-	-	0	+
$f(x)$							

Άρα η f παρουσιάζει :

Δύο τοπικά ελάχιστα στα σημεία :

$M(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ και $N(2, 1)$ και

δύο τοπικά μέγιστα στα σημεία :

$K(0, 5)$ και $P(3, 6)$

54) Μας δίνουν μια συνάρτηση f με παραμέτρους και ζητούν να βρούμε για ποιες τιμές της παραμέτρου η f έχει κάποιο συγκεκριμένο είδος μονοτονίας (π.χ. είναι γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα) τότε:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f , εξασφαλίζουμε τη συνέχεια και βρίσκουμε την $f'(x)$ (η οποία συνήθως εξαρτάται από ένα παραμετρικό δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς χ)
- Γράφουμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η $f'(x)$ ώστε η f να έχει το ζητούμενο είδος μονοτονίας (π.χ. για να είναι $f \nearrow$ στο A_f θα πρέπει $f'(x) > 0 \ \forall x \in A_f$)
- Στηριζόμενοι στο πως μεταβάλλονται τα πρόσημα του τριωνύμου βρίσκουμε τους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι
- Ελέγχουμε την μονοτονία της f για την ειδική περίπτωση που η παράμετρος παίρνει τις τιμές που μηδενίζεται η διακρίνουσα (και που βρήκαμε στο βήμα (iii))

Παρακάτω φαίνονται όλες οι περιπτώσεις μεταβολής πρόσημων του τριωνύμου : $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$

χ	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$		
$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$	-	0	+	0	-	$\alpha < 0$
	+	0	-	0	+	$\alpha > 0$
$\Delta y \quad \Delta > 0$						

χ	$-\infty$	ρ	$+\infty$	
$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$	-	0	-	$\alpha < 0$
	+	0	+	$\alpha > 0$
Av $\Delta = 0$				

χ	$-\infty$	$+\infty$	
$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$	-	-	$\alpha < 0$
	+	+	$\alpha > 0$
Av $\Delta < 0$			

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\lambda}{3}\chi^3 - \frac{\lambda+3}{2}\chi^2 + (\lambda^2+3\lambda)\chi + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ η συνάρτηση είναι

(α) γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της

(β) γνήσια φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της

(γ) έχει και τα δύο είδη μονοτονίας στο πεδίο ορισμού της (δηλ. σε κάποια διαστήματα είναι γνήσια αύξουσα και σε κάποια είναι γνήσια φθίνουσα)

Λύση

Η f ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \lambda\chi^2 - (\lambda+3)\chi + \lambda(\lambda+3), \quad \chi \in \mathbb{R}$$

(α) Για να είναι $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει $f'(x) > 0 \ \forall \chi \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\lambda\chi^2 - (\lambda+3)\chi + \lambda(\lambda+3) > 0 \ \forall \chi \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Αν $\lambda \neq 0$ τότε η $f'(x)$ είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς χ άρα για να ισχύει η (1)

θα πρέπει να έχω: $\lambda > 0$ (i) (αφού λ ο συντελεστής του χ^2) και

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)^2 - 4\lambda^2(\lambda+3) < 0 \Leftrightarrow (\lambda+3) \cdot (\lambda+3-4\lambda^2) < 0 \Leftrightarrow (\lambda+3) \cdot (-4\lambda+3) \cdot (\lambda-1) < 0$$

Από το διπλανό πίνακα που δείχνει πως μεταβάλλονται

τα πρόσημα της διακρίνουσας για τις διάφορες τιμές

του $\lambda \in \mathbb{R}$ έχω ότι $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-3, -\frac{3}{4}) \cup (1, +\infty)$ (ii)

χ	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
Δ	+	0	-	0	-

Από (i) και (ii) έχω $\lambda \in (1, +\infty)$

Ειδικά αν $\lambda = 1$ τότε $f'(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 > 0 \forall x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ άρα $f \nearrow$ στο $(-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$ δηλ. $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$

και αν $\lambda = 0$ τότε $f'(x) = -3x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε εύκολα βρίσκω ότι :

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f'(x) > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $(-\infty, 0]$ και

για $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ άρα $f \searrow$ στο $[0, +\infty)$

Τελικά έχω ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της όταν $\lambda \in [1, +\infty)$

(β) Για να είναι $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει $f'(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\lambda x^2 - (\lambda+3)x + \lambda(\lambda+3) < 0 \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Αν $\lambda \neq 0$ τότε η $f'(x)$ είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x άρα για να ισχύει η (2)

θα πρέπει να έχω: $\lambda < 0$ (i) (αφού λ ο συντελεστής του x^2) και

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)^2 - 4\lambda^2(\lambda+3) < 0 \Leftrightarrow (\lambda+3) \cdot (\lambda+3-4\lambda^2) < 0 \Leftrightarrow (\lambda+3) \cdot (-4\lambda+3) \cdot (\lambda-1) < 0$$

Από το διπλανό πίνακα που δείχνει πως μεταβάλλονται

τα πρόσημα της διακρίνουσας για τις διάφορες τιμές

του $\lambda \in \mathbb{R}$ έχω ότι $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-3, -\frac{3}{4}) \cup (1, +\infty)$ (ii)

χ	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
Δ	+	0	-	0	-

Ειδικά αν $\lambda = -3$ τότε $f'(x) = -3x^2 < 0 \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

άρα $f \searrow$ στο $(-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$ δηλ. $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$

Αν $\lambda = -\frac{3}{4}$ τότε $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{27}{16} = -\frac{3}{4}\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) = -\frac{3}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ άρα

$f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, +\infty)$ άρα $f \searrow$ στο $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{3}{2}, +\infty)$

δηλ. $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$

και αν $\lambda = 0$ τότε $f'(x) = -3x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε εύκολα βρίσκω ότι :

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f'(x) > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $(-\infty, 0]$

και για $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ άρα $f \searrow$ στο $[0, +\infty)$

Τελικά έχω ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της όταν $\lambda \in [-3, -\frac{3}{4}]$

(γ) Για να έχει η f και τα δύο είδη μονοτονίας στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει η $f'(x)$ να μη διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ **συνθήκη (3)**

Αν $\lambda \neq 0$ (α) τότε η $f'(x)$ είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x άρα για να ισχύει η **συνθήκη (3)** θα πρέπει να έχω:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)^2 - 4\lambda^2(\lambda+3) > 0 \Leftrightarrow (\lambda+3) \cdot (\lambda+3-4\lambda^2) > 0 \Leftrightarrow (\lambda+3) \cdot (-4\lambda+3) \cdot (\lambda-1) > 0$$

Από το διπλανό πίνακα μεταβολής των προσήμων της διακρίνουσας για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, και την (α) έχω ότι $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -3) \cup (-\frac{3}{4}, 0) \cup (0, 1)$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
Δ	+	0	-	0	+

Αν $\lambda = 0$ τότε $f'(x) = -3x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε εύκολα βρίσκω ότι:

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f'(x) > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $(-\infty, 0]$

και για $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ άρα $f \searrow$ στο $[0, +\infty)$

Τελικά η f έχει και τα δύο είδη μονοτονίας στο πεδίο ορισμού της όταν $\lambda \in (-\infty, -3) \cup (-\frac{3}{4}, 1)$

Π.χ. 2) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^5 - \frac{\lambda}{4}x^4 - \frac{7\lambda}{3}x^3 + \frac{\lambda^2}{2}x^2 + 2\lambda^2x - 3$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Λύση

Η f ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = 5x^4 - \lambda x^3 - 7\lambda x^2 + \lambda^2 x + 2\lambda^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για να είναι $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$5x^4 - \lambda x^3 - 7\lambda x^2 + \lambda^2 x + 2\lambda^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

ΣΚΕΨΗ

Η $f'(x)$ είναι πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού ως προς x και παρατηρώ ότι οι συντελεστές του επαληθεύουν την **συνθήκη ΤΖΟΥΝΑΚΟΥ** άρα εύκολα παραγοντοποιείται

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω είναι κατοχυρωμένη, πνευματική ιδιοκτησία του Κ^{ου} Παναγιώτη Ν. Τζουνάκου. Η χρήση κα διδαχή της επιτρέπεται, **ΜΟΝΟ** αν αναφέρεται ως «συνθήκη ΤΖΟΥΝΑΚΟΥ»

Αν στο πολυώνυμο: $ax^4 + bx^3 + \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$, $a \neq 0$ ισχύει: $\frac{\beta}{\delta} \cdot \epsilon + \frac{\delta}{\beta} \cdot a = \gamma$ τότε το πολυώνυμο γράφεται ως γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων. (αντικαθιστώ τον όρο γx^2 με το άθροισμα: $\frac{\beta}{\delta} \cdot \epsilon x^2 + \frac{\delta}{\beta} \cdot ax^2$ και κάνω ομαδοποίηση)

ΤΖΟΥΝΑΚΟΣ – Πολυώνυμα – Β' Λυκείου

$$\text{Η (1) ισοδύναμα γράφεται: } 5x^4 - \lambda x^3 - 2\lambda x^2 - 5\lambda x^2 + \lambda^2 x + 2\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(5x^2 - \lambda x - 2\lambda) - \lambda(5x^2 - \lambda x - 2\lambda) > 0 \Leftrightarrow (x^2 - \lambda) \cdot (5x^2 - \lambda x - 2\lambda) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Επειδή $\lambda < 0$, ο παράγοντας $(x^2 - \lambda)$ είναι πάντα θετικός άρα

$$(2) \Leftrightarrow 5x^2 - \lambda x - 2\lambda > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι το $5 > 0$ για να αληθεύει η (3) θα πρέπει η διακρίνουσα

του τριωνύμου να είναι αρνητική. Δηλ. $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 40\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 40) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-40, 0)$

Ειδικά αν $\lambda = -40$ τότε $f'(x) = (x^2 + 40) \cdot (5x^2 + 40x + 80) \Leftrightarrow f'(x) = 5(x^2 + 40) \cdot (x^2 + 4)^2$

Άρα $f'(x) > 0 \forall x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ άρα f ↗ στο $(-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$ δηλ. f ↗ στο $\mathbb{R}$

Τελικά έχω ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της όταν $\lambda \in [-40, 0)$

π.χ. 3) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{3x - \kappa^2 + 2\kappa}{x-1}$ Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι γνήσια φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται στο $\mathbb{R} - \{1\}$, είναι συνεχής ως ρητή και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left(\frac{3x - \kappa^2 + 2\kappa}{x-1} \right)' \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x - \kappa^2 + 2\kappa)' \cdot (x-1) - (3x - \kappa^2 + 2\kappa) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{3(x-1) - (3x - \kappa^2 + 2\kappa)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\kappa^2 - 2\kappa - 3}{(x-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

Για να είναι η f γνήσια φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$

θα πρέπει να είναι $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \Leftrightarrow \frac{\kappa^2 - 2\kappa - 3}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και αφού είναι

$(x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ θα πρέπει $\kappa^2 - 2\kappa - 3 < 0$ (1)

Από τον πίνακα μεταβολής πρόσημων του τριωνύμου

$\kappa^2 - 2\kappa - 3$ έχω ότι η (1) ισχύει όταν $\kappa \in (-1, 3)$

κ	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$\kappa^2-2\kappa-3$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα θα έχω f ↘ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ όταν $\kappa \in (-1, 3)$

55) Μας δίνουν μια συνάρτηση f με παραμέτρους και ζητούν να βρούμε για ποιες τιμές της παραμέτρου η f έχει, σε κάποια (εσωτερικά) σημεία της x_0 , ακρότατο (τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο)

ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ

- Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f και εξασφαλίζω ότι είναι συνεχής
- Βρίσκω την $f'(x)$ όπου αυτή ορίζεται
- Λέω: Σύμφωνα με το θεώρημα *FERMAT* για να έχω ακρότατο στο x_0 θα πρέπει $f'(x_0) = 0$ και με όποια άλλη εξίσωση προκύπτει από τα δεδομένα φτιάχνω σύστημα από τη λύση του οποίου υπολογίζω τις παραμέτρους
- (αν δεν είναι “εγγυημένο” ότι στο x_0 έχω ακρότατο) κάνω επαλήθευση (με τον πίνακα μεταβολής των πρόσημων της $f'(x)$) για το ότι πράγματι για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων έχω ακρότατο.

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - 3\alpha x^2 + \beta x - \gamma$ Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο A (-1,1) και τοπικό ελάχιστο στο σημείο B (2, f(2))

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής ως πολωνυμική και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (\chi^3 - 3\alpha\chi^2 + \beta\chi - \gamma)' \Rightarrow f'(x) = 3\chi^2 - 6\alpha\chi + \beta, \chi \in \mathbb{R}$$

Για να έχει ακρότατα στα παραπάνω σημεία A και B (επειδή είναι εσωτερικά σημεία του A_f) θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad f(-1)=1 \\ \text{(ii)} \quad f'(-1)=0 \\ \text{(iii)} \quad f'(2)=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1-3\alpha-\beta-\gamma=1 \\ 3+6\alpha+\beta=0 \\ 12-12\alpha+\beta=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Λύνοντας} \\ \text{το σύστημα} \\ \text{βρίσκω} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = -6 \\ \gamma = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

Τώρα θα ελέγξω αν πράγματι για τις παραπάνω τιμές των α, β, γ η f παρουσιάζει τα ακρότατα που αναφέρει η άσκηση αφού οι συνθήκες $f'(-1)=0$ και $f'(2)=0$ δεν εξασφαλίζουν ούτε την ύπαρξη ακρότατων στα σημεία $\chi_1 = -1$ και $\chi_2 = 2$, αλλά ούτε και το είδος του ακρότατου (στην περίπτωση που πράγματι υπάρχει ακρότατο)

Για τις παραπάνω τιμές των α, β, γ έχω:

$$f(x) = \chi^3 - \frac{3}{2}\chi^2 - 6\chi - \frac{5}{2} \quad \text{και} \quad f'(x) = 3\chi^2 - 3\chi - 6 \Leftrightarrow f'(x) = 3 \cdot (\chi^2 - \chi - 2)$$

Από τον παρακάτω πίνακα μεταβολής των πρόσημων της $f'(x)$ βρίσκω τα ακρότατα της f

χ	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Άρα πράγματι για τις παραπάνω τιμές των α, β, γ που βρήκα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $A(-1, f(-1)) = A(-1, 1)$

και τοπικό ελάχιστο στο σημείο

$$B(2, f(2)) = B(2, -\frac{25}{2})$$

Π.χ 2) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = -\chi^4 + \alpha\chi^2 - \beta\chi - 1$. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B(2, f(2))$.

Λύση

Η συνάρτηση ορίζεται στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής ως πολωνυμική και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (-\chi^4 + \alpha\chi^2 - \beta\chi - 1)' \Rightarrow f'(x) = -4\chi^3 + 2\alpha\chi - \beta, \chi \in \mathbb{R}$$

Για να έχει ακρότατα στα παραπάνω σημεία A και B (επειδή είναι εσωτερικά σημεία του A_f)

θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad f'(-1)=0 \\ \text{(ii)} \quad f'(2)=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4-2\alpha-\beta=0 \\ -32+4\alpha-\beta=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Λύνοντας το} \\ \text{σύστημα βρίσκω:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 6 \\ \beta = -8 \end{array} \right.$$

Τώρα θα ελέγξω αν πράγματι για τις παραπάνω τιμές των α, β η f παρουσιάζει τα ακρότατα που αναφέρει η άσκηση αφού οι συνθήκες $f'(-1)=0$ και $f'(2)=0$ δεν εξασφαλίζουν την ύπαρξη ακρότατων στα σημεία $\chi_1=-1$ και $\chi_2=2$.

Για τις παραπάνω τιμές των α, β έχω:

$$f(x) = -x^4 + 6x^2 + 8x - 1 \quad \text{και} \quad f'(x) = -4x^3 + 12x + 8 \Leftrightarrow f'(x) = -4 \cdot (x-2) \cdot (x+1)^2$$

Από τον παρακάτω πίνακα μεταβολής των πρόσημων της $f'(x)$ βρίσκω τα ακρότατα της f

χ	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

Άρα δεν υπάρχουν τιμές για τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
ώστε τα σημεία $A(-1, f(-1))$ και
 $B(2, f(2))$ να είναι θέσεις τοπικών
ακρότατων της f (συγκεκριμένα το $A(-1, f(-1))$)

56) Μας δίνουν μια συναρτησιακή σχέση (ισότητα) μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f (ίσως μαζί με κάποια υπόθεση) και ζητούν να δείξουμε ότι η f δεν έχει ακρότατο (ή πιθανό ακρότατο)

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ: (i) Παραγωγίζω τη δοσμένη ισότητα (σχέση)
(ii) Λέω: Έστω ότι έχει ακρότατο (ή πιθανό ακρότατο) στο χ_0 , σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα **FERMAT** θα ισχύει $f'(\chi_0)=0$
(iii) Αντικαθιστώντας στην παραγωγισμένη σχέση όπου χ το χ_0 καταλήγω σε άτοπο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μια ακόμα καλή ιδέα – όχι όμως πάντα εφαρμόσιμη – είναι να καταφέρεις να δείξεις ότι η f είναι γνήσια μονότονη.

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ 1) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- (i) Το σύνολο των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης (C_f) με την ευθεία $(\varepsilon) y = 2x - 4$ είναι το κενό $(\emptyset)$ και
(ii) $f^2(x) - (x-1)f(x) + x^2 = 4x - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Να δείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα

Λύση

Παραγωγίζοντας τη σχέση: $f^2(x) - (x-1)f(x) + x^2 = 4x - 2$ έχω:

$$(f^2(x) - (x-1)f(x) + x^2)' = (4x - 2)' \Rightarrow$$

$$2f(x) \cdot f'(x) - f(x) - (x-1) \cdot f'(x) + 2x = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Έστω ότι έχει ακρότατο στο χ_0 τότε από το θεώρημα **FERMAT** θα ισχύει $f'(\chi_0)=0$ (2)

Αντικαθιστώντας στην (1) όπου χ το χ_0 έχω

$$2f(\chi_0) \cdot f'(\chi_0) - f(\chi_0) - (\chi_0 - 1) \cdot f'(\chi_0) + 2\chi_0 = 4 \quad \text{και από τη (2) καταλήγω}$$

$f(x_0) = 2x_0 - 4$ δηλ. η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $(\varepsilon) y = 2x - 4$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο το $(x_0, f(x_0))$. Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

Παρατηρήστε ότι δεν είναι εύκολο για την παραπάνω συνάρτηση να δείξω ότι είναι γνήσια μονότονη, κάτι που μπορεί να γίνει στο παρακάτω παράδειγμα (2^η Λύση)

π.χ 2) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = x^3 + 4x - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.

Λύση

Παραγωγίζοντας τη σχέση: $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = x^3 + 4x - 2$ έχω:

$$\begin{aligned} (f^3(x) - f^2(x) + f(x))' &= (x^3 + 4x - 2)' \Rightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) - 2f(x) \cdot f'(x) + f'(x) = 3x^2 + 4 \Rightarrow \\ (3f^2(x) - 2f(x) + 1) \cdot f'(x) &= 3x^2 + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1) \end{aligned}$$

Έστω ότι έχει ακρότατο στο x_0 τότε από το θεώρημα FERMAT θα ισχύει $f'(x_0) = 0$ (2)

Αντικαθιστώντας στην (1) όπου x το x_0 έχω $(3f^2(x_0) - 2f(x_0) + 1) \cdot f'(x_0) = 3x_0^2 + 4$ και με τη (2) καταλήγω $0 = 3x_0^2 + 4 \Leftrightarrow 3x_0^2 = -4$ που είναι αδύνατο άρα η f δεν έχει ακρότατα

2^η Λύση

Παραγωγίζοντας τη σχέση: $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = x^3 + 4x - 2$ έχω:

$$\begin{aligned} (f^3(x) - f^2(x) + f(x))' &= (x^3 + 4x - 2)' \Rightarrow 3f^2(x) \cdot f'(x) - 2f(x) \cdot f'(x) + f'(x) = 3x^2 + 4 \Rightarrow \\ (3f^2(x) - 2f(x) + 1) \cdot f'(x) &= 3x^2 + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1) \end{aligned}$$

Παρατηρώ ότι το: $3f^2(x) - 2f(x) + 1$ είναι τριώνυμο 2^{ου} βαθμού ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα $\Delta = -8 < 0$ άρα $3f^2(x) - 2f(x) + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Έτσι (1) $\Leftrightarrow f'(x) = \frac{3x^2 + 4}{3f^2(x) - 2f(x) + 1}$ απ' όπου εύκολα συμπεραίνω ότι $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα

f ↗ στο $\mathbb{R}$ άρα η f δεν έχει ακρότατα

6) Εύρεση του τύπου $f(x)$ μιας συνάρτησης f όταν έχουμε σχέση της $f'(x)$

(α) Περίπτωση Η σχέση είναι (ή γίνεται) της μορφής: $f'(x) = k(x)$ (1) τότε βρίσκω την αρχική $K(x)$ της $k(x)$ (με αντίστροφη σκέψη των κανόνων παραγώγισης ή με ολοκλήρωση της $k(x)$ (επόμενο κεφάλαιο)) και (1) $\Leftrightarrow f'(x) = K'(x) \Leftrightarrow f(x) = K(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

ΜΗΝ ΞΕΧΝΑΤΕ ότι εφόσον υπάρχει η $f'(x)$, η f είναι συνεχής !!!

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται οι αρχικές συναρτήσεις ορισμένων βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση $f(x)$	Αρχική συνάρτηση $F(x)$	Συνάρτηση $f(ax+b)$	Αρχική συνάρτηση $F(ax+b)$
1	$x+c$		
$x^k, k \neq -1$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}+c$	$(ax+b)^k, k \neq -1$	$\frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{k+1}}{k+1}+c$
x^{-1} ή $\frac{1}{x}$	$\ln x +c$	$(ax+b)^{-1}$ ή $\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \cdot \ln ax+b +c$
$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x+c$	$\eta\mu(ax+b)$	$\frac{1}{a} \cdot (-\sigma\upsilon\nu(ax+b))+c$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x+c$	$\sigma\upsilon\nu(ax+b)$	$\frac{1}{a} \cdot \eta\mu(ax+b)+c$
$\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$-\sigma\phi x+c$	$\frac{1}{\eta\mu^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a} \cdot (-\sigma\phi(ax+b))+c$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\epsilon\phi x+c$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a} \cdot \epsilon\phi(ax+b)+c$
e^x	e^x+c	e^{ax+b}	$\frac{1}{a} \cdot e^{ax+b}+c$
$\kappa^x, \kappa > 0$	$\frac{\kappa^x}{\ln \kappa}+c$	$\kappa^{ax+b}, \kappa > 0$	$\frac{1}{a} \cdot \frac{\kappa^{ax+b}}{\ln \kappa}+c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax+b}+c$

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

(i) $f'(x) = \eta\mu x - 3x + \sqrt{x}$

(ii) $f'(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x} - 3x^2$

(iii) $f'(x) = 3x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - x^3 \cdot \eta\mu x$

(iv) $f'(x) = \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$

Λύση

$$(i) \quad f'(x) = \eta\mu x - 3x + \sqrt{x} \Leftrightarrow f'(x) = \eta\mu x - 3x + x^{1/2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(-\sigma\upsilon\nu x - 3 \frac{x^2}{2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} \right)'$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad f'(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x} - 3x^2 \Leftrightarrow f'(x) = (\ln|x| + e^{2x} - x^3)' \Leftrightarrow f(x) = \ln|x| + e^{2x} - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$(iii) \quad f'(x) = 3x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - x^3 \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow f'(x) = (x^3)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + x^3 \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$$f'(x) = (x^3 \cdot \sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 \cdot \sigma\upsilon\nu x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Όταν η παράγωγος f' παρουσιάζεται ως άθροισμα (ή διαφορά) δύο γινομένων, από δύο διαφορετικών τύπων συναρτήσεων, τότε ελέγχω μήπως προέρχεται από παραγωγή γινομένου

$$\text{δηλ. } f' = g' \cdot h + g \cdot h' \Leftrightarrow f' = (g \cdot h)'$$

$$(iv) \quad f'(x) = \frac{\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi}{\chi^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\eta\mu\chi)' \cdot \chi - \chi' \cdot \eta\mu\chi}{\chi^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{\eta\mu\chi}{\chi} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{\eta\mu\chi}{\chi} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν η παράγωγος f' παρουσιάζεται ως πηλίκο όπου στον αριθμητή έχω άθροισμα (ή διαφορά) δύο γινομένων, από δύο διαφορετικών τύπων συναρτήσεις, ενώ στον παρονομαστή έχω το τετράγωνο μιας εκ των δύο παραπάνω συναρτήσεων, τότε ελέγχω μήπως προέρχεται από παραγωγή πηλίκου δηλ.

$$f' = \frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{h^2} = \left(\frac{g}{h} \right)' \quad \left(\begin{array}{l} \text{Στο παραπάνω αντιστοιχίζω όπου } h \leftrightarrow \chi \\ \text{(από τον παρονομαστή) οπότε (από τον} \\ \text{αριθμητή έχω την αντιστοίχιση) } g \leftrightarrow \eta\mu\chi \end{array} \right)$$

(β) Περίπτωση Έχω συναρτησιακή σχέση των $f(x)$ και $f'(x)$ τότε:

(i) Φέρνω στο 1^ο μέλος τις $f(x)$ και $f'(x)$ και προσπαθώ να καταλήξω σε μια από τις μορφές:

(A) $h(f(\chi)) \cdot f'(\chi) = k(\chi)$ ή

(ii) βρίσκω την αρχική $K(\chi)$ της $k(\chi)$ και $H(\chi)$ της $h(\chi)$

οπότε η (A) γράφεται

$$[H(f(\chi))] = (K(\chi))' \Leftrightarrow$$

$$H(f(\chi)) = K(\chi) + c \text{ και}$$

λύνω ως προς $f(\chi)$

Γενικά αν παρουσιάζεται η σύνθεση $h(f(\chi))$ αναζητήσε το γινόμενο $h(f(\chi)) \cdot f'(\chi) = k(\chi)$

(B) $g(\chi) \cdot f(\chi) + f'(\chi) = k(\chi)$

(ii) βρίσκω την αρχική $G(\chi)$ της $g(\chi)$

(iii) πολλαπλασιάζω την (B) με $e^{G(\chi)}$ οπότε έχω

$$e^{G(\chi)} \cdot g(\chi) \cdot f(\chi) + e^{G(\chi)} \cdot f'(\chi) = e^{G(\chi)} \cdot k(\chi) \Rightarrow$$

$$e^{G(\chi)} \cdot G'(\chi) \cdot f(\chi) + e^{G(\chi)} \cdot f'(\chi) = e^{G(\chi)} \cdot k(\chi) \Rightarrow$$

(iv) βρίσκω την αρχική $T(\chi)$ της $e^{G(\chi)} \cdot k(\chi)$ και έχω:

$$[e^{G(\chi)} \cdot f(\chi)] = [T(\chi)]' \Rightarrow e^{G(\chi)} \cdot f(\chi) = T(\chi) + c$$

Άρα $f(\chi) = \frac{T(\chi) + c}{e^{G(\chi)}}$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΩ: Για την εύρεση των αρχικών θα βοηθήσουν και τα ολοκληρώματα (επόμενο κεφάλαιο)

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

- π.χ. 1) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις
- (i) $f'(x) = (\eta\mu\chi - 3x^2 + 2) \cdot f(\chi)$ (ii) $2\chi \cdot f(\chi) + f'(\chi) = 2\chi \cdot (\sigma\upsilon\nu\chi^2 - \eta\mu\chi^2)$
- (iii) $2f'(\chi) \cdot \sqrt{\chi} = e^{\sqrt{\chi} - f(\chi)}$ (iv) $f'(\chi) = 1 + (f(\chi) - \chi)(3\chi^2 + 1)$, $f'(\chi) \neq 1 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$ & $f(0) = -1$

Λύση

(i) $f'(x) = (\eta\mu\chi - 3x^2 + 2) \cdot f(\chi)$ (1) Προφανώς η $f(\chi) = 0$ την επαληθεύει άρα η συνάρτηση $f(\chi) = 0$ (α) είναι μια λύση του προβλήματος.

Έβαλα την f μαζί με την f' και κατέληξα στην μορφή (A)

Αν $f(\chi) \neq 0$ τότε η (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{f(\chi)} \cdot f'(\chi) = (\eta\mu\chi - 3x^2 + 2) \Leftrightarrow$

$$(\ln|f(\chi)|)' = (-\sigma\upsilon\nu\chi - \chi^3 + 2\chi)' \Leftrightarrow \ln|f(\chi)| = -\sigma\upsilon\nu\chi - \chi^3 + 2\chi + c \Leftrightarrow$$

$$|f(\chi)| = e^{-\sigma\upsilon\nu\chi - \chi^3 + 2\chi + c} \Leftrightarrow f(\chi) = \pm e^{-\sigma\upsilon\nu\chi - \chi^3 + 2\chi + c} \Leftrightarrow f(\chi) = \pm e^c \cdot e^{2\chi - \chi^3 - \sigma\upsilon\nu\chi} \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) = k \cdot e^{2\chi - \chi^3 - \sigma\upsilon\nu\chi}, \quad k \in \mathbb{R}^* \quad (\beta)$$

έθεσα όπου $\pm e^c = k \neq 0$

Από (α) και (β) έχω $f(\chi) = k \cdot e^{2\chi - \chi^3 - \sigma\upsilon\nu\chi}$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Β' τρόπος (1)} \Leftrightarrow (-\eta\mu\chi + 3\chi^2 - 2) \cdot f(\chi) + f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow e^{\sigma\nu\chi + \chi^3 - 2\chi} \cdot (-\eta\mu\chi + 3\chi^2 - 2) \cdot f(\chi) + e^{\sigma\nu\chi + \chi^3 - 2\chi} \cdot f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\sigma\nu\chi + \chi^3 - 2\chi} \cdot f(\chi) \right)' = 0 \Leftrightarrow e^{\sigma\nu\chi + \chi^3 - 2\chi} \cdot f(\chi) = k \Leftrightarrow f(\chi) = k \cdot e^{2\chi - \chi^3 - \sigma\nu\chi}, k \in \mathbb{R}$$

Παρουσίαση τη μορφή (B) και απέφυγα την περίπτωση $f(\chi) = 0$

$$\text{(ii)} \quad 2\chi \cdot f(\chi) + f'(\chi) = 2\chi \cdot (\sigma\nu\chi^2 - \eta\mu\chi^2) \Leftrightarrow$$

$$2\chi \cdot e^{\chi^2} f(\chi) + e^{\chi^2} f'(\chi) = 2\chi \cdot e^{\chi^2} \cdot \sigma\nu\chi^2 - 2\chi \cdot e^{\chi^2} \cdot \eta\mu\chi^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{\chi^2} \right)' \cdot f(\chi) + e^{\chi^2} \cdot f'(\chi) = \left(e^{\chi^2} \right)' \cdot \sigma\nu\chi^2 + e^{\chi^2} \cdot (\sigma\nu\chi^2)' \Leftrightarrow \left(e^{\chi^2} \cdot f(\chi) \right)' = \left(e^{\chi^2} \cdot \sigma\nu\chi^2 \right)' \Leftrightarrow$$

$$e^{\chi^2} \cdot f(\chi) = e^{\chi^2} \cdot \sigma\nu\chi^2 + c \Leftrightarrow f(\chi) = \frac{e^{\chi^2} \cdot \sigma\nu\chi^2 + c}{e^{\chi^2}}, c \in \mathbb{R}.$$

Παρουσιάζεται η σύνθεση $e^{f(\chi)}$ άρα καταλήγω στη μορφή (A)

$$\text{(iii)} \quad 2f'(\chi) \cdot \sqrt{\chi} = e^{\sqrt{\chi} - f(\chi)} \Leftrightarrow 2f'(\chi) \cdot \sqrt{\chi} = \frac{e^{\sqrt{\chi}}}{e^{f(\chi)}} \Leftrightarrow f'(\chi) \cdot e^{f(\chi)} = \frac{e^{\sqrt{\chi}}}{2\sqrt{\chi}} \Leftrightarrow \left(e^{f(\chi)} \right)' = \left(e^{\sqrt{\chi}} \right)'$$

$$\text{άρα } e^{f(\chi)} = e^{\sqrt{\chi}} + c, c \in \mathbb{R} \quad \text{άρα } \ln(e^{f(\chi)}) = \ln(e^{\sqrt{\chi}} + c) \Leftrightarrow f(\chi) = \ln(e^{\sqrt{\chi}} + c)$$

(iv) Έχω $f'(\chi) = 1 + (f(\chi) - \chi)(3\chi^2 + 1)$ (1) με $f'(\chi) \neq 1 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$ & $f(0) = -1$
 Παρατηρώ ότι αν $\exists \chi_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\chi_0) = \chi_0$ τότε (1) $\Rightarrow f'(\chi_0) = 1$ αδύνατο, οπότε

$$f(\chi) \neq \chi \quad \forall \chi \in \mathbb{R}. \quad \text{Επομένως (1)} \Leftrightarrow \frac{f'(\chi) - 1}{f(\chi) - \chi} = 3\chi^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{(f(\chi) - \chi)'}{f(\chi) - \chi} = 3\chi^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln|f(\chi) - \chi|)' = (\chi^3 + \chi)' \Leftrightarrow \ln|f(\chi) - \chi| = \chi^3 + \chi + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } \chi = 0 \text{ έχω } \ln|-1| = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ άρα } \ln|f(\chi) - \chi| = \chi^3 + \chi \Leftrightarrow |f(\chi) - \chi| = e^{\chi^3 + \chi}$$

$$\text{Άρα } f(\chi) = \chi + e^{\chi^3 + \chi} \text{ (α)} \quad \text{ή } f(\chi) = \chi - e^{\chi^3 + \chi} \text{ (β)} \quad \text{ή } f(\chi) = \begin{cases} \chi - e^{\chi^3 + \chi}, & \chi \in A \\ \chi + e^{\chi^3 + \chi}, & \chi \in \mathbb{R} - A \end{cases} \text{ (γ)}$$

$$\text{(α)} \xrightarrow{\chi=0} f(0) = 1 \text{ απορρίπτεται,} \quad \text{(β)} \xrightarrow{\chi=0} f(0) = -1 \text{ δεκτό,}$$

(γ) $\rightarrow$ χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρώ ότι $(\dots, \alpha] \subseteq A$ και $(\alpha, \dots) \subseteq \mathbb{R} - A$.

Αφού f παραγ/σιμη, έχω ότι η f είναι συνεχής άρα

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \alpha^+} f(\chi) = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha - e^{\alpha^3 + \alpha} = \alpha + e^{\alpha^3 + \alpha} \Leftrightarrow 2 \cdot e^{\alpha^3 + \alpha} = 0 \text{ αδύνατο}$$

$$\text{Άρα } f(\chi) = \chi - e^{\chi^3 + \chi}, \chi \in \mathbb{R}$$

7) Για ασκήσεις που αναφέρονται στην εύρεση της ν-οστής παραγώγου μιας δοσμένης συνάρτησης f

α) Μας δίνουν τον τύπο της ν-οστής παραγώγου και μας ζητούν να τον αποδείξουμε.

Αντιμετώπιση: Τον αποδεικνύουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής

β) Μας δίνουν την συνάρτηση και μας ζητούν να βρούμε τη ν-οστή της παράγωγο.

Αντιμετώπιση: Βρίσκουμε την $1^{\text{η}} - 2^{\text{η}} - 3^{\text{η}} \dots$ παράγωγο έως ότου συμπεράνουμε τον τύπο της ν-οστής παραγώγου (σ' αυτό βοηθούν και οι πρόοδοι) και μετά τον αποδεικνύουμε με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Π.χ 1) Να δείξετε ότι η ν-οστή παράγωγος της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \chi \cdot e^{2\chi}$ είναι
 η $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot e^{2\chi} \cdot (2\chi + n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Λύση

Για $v=1$ η (1) γράφεται: $f'(x)=2^{1-1} \cdot e^{2x} \cdot (2x+1)=e^{2x} \cdot (2x+1)$ που αληθεύει αφού από τον τύπο της f έχω: $f'(x)=(x \cdot e^{2x})'=x' \cdot e^{2x} + x \cdot (e^{2x})'=e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot (2x)'=e^{2x} \cdot (1+2x)$

Υποθέτω ότι ισχύει για v δηλ. ότι: $f^{(v)}(x)=2^{v-1} \cdot e^{2x} \cdot (2x+v)$ (2)

Θα δείξω ότι ισχύει για $v+1$ δηλ. ότι $f^{(v+1)}(x)=2^v \cdot e^{2x} \cdot (2x+v+1)$ (3)

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (2) έχω: $(f^{(v)}(x))'=(2^{v-1} \cdot e^{2x} \cdot (2x+v))' \Rightarrow$

$$f^{(v+1)}(x)=2^{v-1} \cdot (e^{2x} \cdot (2x+v))'=2^{v-1} \cdot \left[(e^{2x})' \cdot (2x+v) + e^{2x} \cdot (2x+v)' \right]=$$

$$2^{v-1} \cdot (2e^{2x} \cdot (2x+v) + e^{2x} \cdot 2)=2^{v-1} \cdot 2e^{2x} \cdot ((2x+v)+1)=2^v \cdot e^{2x} \cdot (2x+v+1) \text{ δηλ. η (3)}$$

Άρα η (1) ισχύει $\forall v \in \mathbb{N}^*$

Π.χ. 2) Α. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=f(x-1)+2(x-1)$ (1)
 $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(1)=1$. (i) Να βρεθούν οι τιμές $f(2), f(3)$ και $f(4)$
(ii) Δείξτε ότι $f(v)=v^2-v+1 \quad \forall v \in \mathbb{N}^*$
Β. Δίνεται συνάρτηση με τύπο $g(x)=e^x \cdot (x^2+1)$
(i) Να βρείτε τις παραγώγους $1^{n5}-2^{n5}-3^{n5}$ και 4^{n5} τάξης
(ii) Να βρείτε τη v -οστή της παράγωγο: $g^{(v)}(x)$

Λύση

Α. (i) Από (1) για $x=2$ έχω $f(2)=f(1)+2(2-1) \Rightarrow f(2)=1+2 \Rightarrow f(2)=3$
για $x=3$ έχω $f(3)=f(2)+2(3-1) \Rightarrow f(3)=3+4 \Rightarrow f(3)=7$
για $x=4$ έχω $f(4)=f(3)+2(4-1) \Rightarrow f(4)=7+6 \Rightarrow f(4)=13$

(ii) Από (1) για $x=2$ έχω: $f(2)=f(1)+2(2-1) \Rightarrow f(2)=f(1)+2$
για $x=3$ έχω: $f(3)=f(2)+2(3-1) \Rightarrow f(3)=f(2)+4$
για $x=4$ έχω: $f(4)=f(3)+2(4-1) \Rightarrow f(4)=f(3)+6$
.....
.....
για $x=v$ έχω: $f(v)=f(v-1)+2(v-1)$

} Προσθέτοντας
κατά μέλη τις
προηγούμενες
ισότητες έχω:

$$f(2)+f(3)+f(4)+\dots+f(v)=f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(v-1)+(2+4+6+\dots+2(v-1))$$

και διαγράφοντας τους ίδιους όρους από τα δύο μέλη καταλήγω:

$$f(v)=f(1)+(2+4+6+\dots+2(v-1)) \Leftrightarrow f(v)=f(1)+2(1+2+3+\dots+(v-1)) \quad (2)$$

Όμως το άθροισμα $1+2+3+\dots+(v-1)$ είναι το άθροισμα των $v-1$ διαδοχικών πρώτων όρων αριθμητικής προόδου a_n με πρώτο όρο $a_1=1$, διαφορά $\omega=1$, και πλήθος όρων $\kappa=v-1$. Από τον τύπο $S_\kappa=\frac{2a_1+(\kappa-1)\cdot\omega}{2} \cdot \kappa$, που δίνει το άθροισμα των κ πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, έχω:

$$1+2+3+\dots+(v-1)=\frac{2 \cdot 1+(v-1-1) \cdot 1}{2} \cdot (v-1)=v \cdot (v-1)$$

$$\text{Έτσι από τη (2) έχω: } f(v)=f(1)+2 \cdot \frac{v \cdot (v-1)}{2} \Leftrightarrow f(v)=f(1)+v^2-v \Leftrightarrow$$

$$f(v)=v^2-v+1, v \in \mathbb{N}^*$$

B. (i) Προφανώς η g ορίζεται $\forall \chi \in \mathbb{R}$ άρα $A_g = \mathbb{R}$

$$\text{Έχω } g'(\chi) = (e^x \cdot (\chi^2 + 1))' = (e^x)' \cdot (\chi^2 + 1) + e^x \cdot (\chi^2 + 1)' = e^x \cdot (\chi^2 + 1) + e^x \cdot 2\chi$$

$$\text{Άρα } g'(x) = e^x \cdot (\chi^2 + 2\chi + 1), \chi \in \mathbb{R} \quad (\text{A})$$

$$g''(\chi) = (e^x \cdot (\chi^2 + 2\chi + 1))' = (e^x)' \cdot (\chi^2 + 2\chi + 1) + e^x \cdot (\chi^2 + 2\chi + 1)' =$$

$$e^x \cdot (\chi^2 + 2\chi + 1) + e^x \cdot (2\chi + 2)$$

$$\text{Άρα } g''(\chi) = e^x \cdot (\chi^2 + 4\chi + 3), \chi \in \mathbb{R}$$

$$g'''(\chi) = (e^x \cdot (\chi^2 + 4\chi + 3))' = (e^x)' \cdot (\chi^2 + 4\chi + 3) + e^x \cdot (\chi^2 + 4\chi + 3)' =$$

$$e^x \cdot (\chi^2 + 4\chi + 3) + e^x \cdot (2\chi + 4)$$

$$\text{Άρα } g'''(\chi) = e^x \cdot (\chi^2 + 6\chi + 7), \chi \in \mathbb{R}$$

$$g^{(4)}(\chi) = (e^x \cdot (\chi^2 + 6\chi + 7))' = (e^x)' \cdot (\chi^2 + 6\chi + 7) + e^x \cdot (\chi^2 + 6\chi + 7)' =$$

$$e^x \cdot (\chi^2 + 6\chi + 7) + e^x \cdot (2\chi + 6)$$

$$\text{Άρα } g^{(4)}(\chi) = e^x \cdot (\chi^2 + 8\chi + 13), \chi \in \mathbb{R}$$

(ii) Παρατηρώ ότι οι παράγωγοι $1^{\eta\varsigma} - 2^{\eta\varsigma} - 3^{\eta\varsigma}$ και $4^{\eta\varsigma}$ τάξης της συνάρτησης g είναι γινόμενο της e^x με ένα τριώνυμο της μορφής $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$

Ακόμα παρατηρώ ότι οι αντίστοιχοι συντελεστές β του χ είναι η ακολουθία των αριθμών: $2, 4, 6, 8$ που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (β_n) με πρώτο όρο $\beta_1 = 2$ και διαφορά $\omega = 2$. Άρα θα πρέπει ο συντελεστής β του χ στη $g^{(v)}(\chi)$ να είναι ο n -οστός όρος β_n της παραπάνω αριθμητικής προόδου δηλ.

$$\beta_n = \beta_1 + (n-1)\omega \Rightarrow \beta_n = 2 + (n-1)2 = 2n$$

Οι αντίστοιχοι σταθεροί όροι του τριωνύμου είναι οι αριθμοί: $1, 3, 7, 13$ που είναι οι τιμές $f(1), f(2), f(3)$ και $f(4)$ της συνάρτησης f του πρώτου ερωτήματος. Άρα θα πρέπει ο σταθερός όρος του τριωνύμου στη $g^{(v)}(\chi)$ να είναι η τιμή $f(v) = v^2 - v + 1$.

$$\text{Ισχυρίζομαι λοιπόν ότι: } g^{(v)}(\chi) = e^x \cdot (\chi^2 + 2v \cdot \chi + v^2 - v + 1), v \in \mathbb{N}^* \quad (\alpha)$$

Θα αποδείξω τον ισχυρισμό μου με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής

$$\text{Ελέγχω αν η } (\alpha) \text{ ισχύει για } v=1 \quad g'(\chi) = e^x \cdot (\chi^2 + 2 \cdot 1 \cdot \chi + 1^2 - 1 + 1) \Rightarrow$$

$$g'(x) = e^x \cdot (\chi^2 + 2\chi + 1)$$

$$\text{Υποθέτω ότι η } (\alpha) \text{ ισχύει για } v \text{ δηλ. ότι } g^{(v)}(\chi) = e^x \cdot (\chi^2 + 2v \cdot \chi + v^2 - v + 1)$$

Θα δείξω ότι η (α) ισχύει για $v+1$ δηλ. ότι

$$g^{(v+1)}(\chi) = e^x \cdot [\chi^2 + 2(v+1) \cdot \chi + (v+1)^2 - (v+1) + 1] \Leftrightarrow$$

$$g^{(v+1)}(\chi) = e^x \cdot [\chi^2 + 2(v+1) \cdot \chi + v^2 + v + 1]$$

$$\text{Έχω } g^{(v+1)}(\chi) = [g^{(v)}(\chi)]' = [e^x \cdot (\chi^2 + 2v \cdot \chi + v^2 - v + 1)]' =$$

$$(e^x)' \cdot (\chi^2 + 2v \cdot \chi + v^2 - v + 1) + e^x \cdot (\chi^2 + 2v \cdot \chi + v^2 - v + 1)' =$$

$$e^x \cdot (\chi^2 + 2v \cdot \chi + v^2 - v + 1) + e^x \cdot (2\chi + 2v) = e^x \cdot (\chi^2 + 2v \cdot \chi + v^2 - v + 1 + 2\chi + 2v) \Rightarrow$$

$$g^{(v+1)}(\chi) = e^x \cdot [\chi^2 + 2(v+1) \cdot \chi + v^2 + v + 1]$$

Άρα η (α) ισχύει $\forall v \in \mathbb{N}^*$

8) Για ασκήσεις που αναφέρονται στο πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης (ή στην ύπαρξη σημείων χ_0 που επαληθεύουν κάποια ισότητα)

81) Μας ζητούν να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει τουλάχιστο μια ρίζα (ή ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα χ_0 που ικανοποιεί μια ισότητα)

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ 1^η Σκέψη Θεώρημα Bolzano (κοίτα στα θεωρήματα συνέχειας συναρτήσεων)

2^η Σκέψη Εύρεση προφανούς λύσης

3^η Σκέψη Με βήματα αντίστοιχα με αυτά που έκανα για την εύρεση του $f(A)$ (μονοτονία – ακρότατα – οριακές τιμές) εξασφαλίζω ότι η f αλλάζει τουλάχιστο μια φορά πρόσημο στις τιμές της και άρα (εφ' όσον είναι συνεχής) έχει τουλάχιστο μία ρίζα

4^η Σκέψη Εφαρμογή του θεωρήματος Rolle στην αρχική συνάρτηση

5^η Σκέψη Εφαρμογή του θεωρήματος Fermat στην αρχική συνάρτηση (Δείχνω ότι η αρχική συνάρτηση έχει τουλάχιστο ένα ακρότατο σε εσωτερικό σημείο $\chi_0 \in A_f$ οπότε σύμφωνα από Fermat θα είναι: $f'(\chi_0) = 0$)

6^η Σκέψη Συνδιασμός των θεωρημάτων Μέγιστης–Ελάχιστης τιμής και Ενδιάμεσων τιμών (κοίτα στα θεωρήματα συνέχειας συναρτήσεων)

7^η Σκέψη Εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

(Δείτε Περίπτωση 13 Πότε εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν ζητούν να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει τουλάχιστο δύο (ή περισσότερες) ρίζες (ή ότι υπάρχουν τουλάχιστο δύο (ή περισσότερα) χ_0 που ικανοποιούν μια δοσμένη ισότητα) εργαζόμαστε αντίστοιχα

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή f' σε όλο το $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η C_f δέχεται δύο εφαπτόμενες κάθετες μεταξύ τους τότε η f έχει ένα τουλάχιστο κρίσιμο σημείο.

Λύση

Έστω χ_1, χ_2 με $\chi_1 < \chi_2$, οι τετμημένες των σημείων στα οποία οι εφαπτόμενες της C_f είναι κάθετες μεταξύ τους. Τότε οι αντίστοιχοι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτόμενων θα είναι $f'(\chi_1)$ και $f'(\chi_2)$ και θα ισχύει: $f'(\chi_1) \cdot f'(\chi_2) = -1 < 0$. Από υπόθεση όμως έχω ότι η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[\chi_1, \chi_2]$. Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano άρα υπάρχει $\chi_0 \in (\chi_1, \chi_2)$ ώστε $f'(\chi_0) = 0$. Άρα το $(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

π.χ. 2) Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παρ/μη στο $[0, 3]$ με $f(1) < f(3) < f(0) < f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in (0, 3)$ ώστε: $f'(\chi_1) = f'(\chi_2) = f'(\chi_3) = 0$.

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 3]$ έχω ότι θα είναι συνεχής στο $[0, 3]$ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, (βλέπε θεωρήματα συνέχειας συναρτήσεων), η f θα έχει στο $[0, 3]$ ολικό Μέγιστο (M) και ολικό Ελάχιστο (E)

Δηλ. υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in [0, 3]$ με $E = f(\chi_1) \leq f(\chi) \leq f(\chi_2) = M \quad \forall \chi \in [0, 3]$ άρα και για τις τιμές $\chi = 0, 1, 2, 3$. Δηλ. θα είναι $f(\chi_1) \leq f(1) < f(3) < f(0) < f(2) \leq f(\chi_2)$

Οπότε τα χ_1, χ_2 αποκλείεται να είναι κάποια από τις τιμές 0 ή 3

Δηλ. έχω ότι η f παρουσιάζει τα ακρότατα στα $\chi_1, \chi_2 \in (0, 3)$

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(\chi_1) = f'(\chi_2) = 0$

Ακόμα για την f' έχω ότι είναι συνεχής στο $[\chi_1, \chi_2] \subset [0, 3]$

είναι παραγωγίσιμη στο $(\chi_1, \chi_2) \subset (0, 3)$ (αφού από υπόθεση υπάρχει η $f''(\chi)$)

$$\text{και } f'(\chi_1) = f'(\chi_2) = 0$$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την $f'(\chi)$ στο διάστημα $[\chi_1, \chi_2]$ οπότε υπάρχει $\chi_3 \in (\chi_1, \chi_2) \subset (0, 3)$ ώστε $f''(\chi_3) = 0$

Π.Χ. 3) Αν οι αριθμοί $\frac{5}{2}, \alpha, \beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi^3 - 3\alpha\chi^2 + \beta\chi + 1 = 0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Λύση

Αφού οι αριθμοί $\frac{5}{2}, \alpha, \beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου θα έχω

$$2\alpha = \frac{5}{2} + \beta \Leftrightarrow 4\alpha = 5 + 2\beta \quad (1)$$

Θεωρώ την συνάρτηση με τύπο $F(\chi) = \frac{\chi^4}{4} - \alpha\chi^3 + \frac{\beta\chi^2}{2} + \chi$ η οποία

1. είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική (α)
2. είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $F'(\chi) = \left(\frac{\chi^4}{4} - \alpha\chi^3 + \frac{\beta\chi^2}{2} + \chi \right)' = \chi^3 - 3\alpha\chi^2 + \beta\chi + 1$ (β)
3. $F(0) = 0$
 $F(1) = \frac{1}{4} - \alpha + \frac{\beta}{2} + 1 = \frac{5 - 4\alpha + 2\beta}{4} = 0$ από (1) } $\Rightarrow F(0) = F(1)$ (γ)

Από (α), (β), (γ) έχω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\chi_0 \in (0, 1)$ ώστε $F'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \chi_0^3 - 3\alpha\chi_0^2 + \beta\chi_0 + 1 = 0$ άρα η εξίσωση

$$\chi^3 - 3\alpha\chi^2 + \beta\chi + 1 = 0 \text{ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα } (0, 1)$$

Παρατηρείστε ότι το παραπάνω θέμα δεν μπορούσαμε να το αντιμετωπίσουμε ούτε με το θεώρημα Bolzano, ούτε βρίσκοντας το σύνολο τιμών της $f(x) = \chi^3 - 3\alpha\chi^2 + \beta\chi + 1$ για $\chi \in (0, 1)$

Π.Χ. 4) Δείξτε ότι η εξίσωση $3\chi - \eta\mu^2\chi = 1$ έχει τουλάχιστο μία θετική ρίζα

Λύση

Θεωρώ την συνάρτηση με τύπο $h(\chi) = 3\chi - \eta\mu^2\chi - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παρ/μη με $h'(\chi) = (3\chi - \eta\mu^2\chi - 1)' \Rightarrow h'(\chi) = 3 - 2\eta\mu\chi \cdot \sin\chi \Leftrightarrow h'(\chi) = 3 - \eta\mu 2\chi, \chi \in \mathbb{R}$.

Προφανώς $h'(\chi) > 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$ άρα και για $\chi \in (0, +\infty)$

Από τον παρακάτω πίνακα μεταβολής των πρόσημων της h' βρίσκω τη μονοτονία της h στο διάστημα $(0, +\infty)$

χ	0	$+\infty$
$h'(\chi)$	+	
$h(\chi)$	-1	$+\infty$

Άρα έχω $h \nearrow$ στο $(0, +\infty)$

Ακόμα έχω $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} (3\chi - \eta\mu^2\chi - 1) = -1$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (3\chi - \eta\mu^2\chi - 1) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\chi \cdot \left(3 - \frac{\eta\mu^2\chi}{\chi} - \frac{1}{\chi} \right) \right] \stackrel{(a)}{=} +\infty$$

Έτσι από την τρίτη γραμμή του παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι το σύνολο τιμών της h είναι το διάστημα $(-1, +\infty)$

Επειδή η τιμή $y=0 \in (-1, +\infty)$ και η h είναι συνεχής έχω, από το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, ότι υπάρχει $\chi_0 \in (0, +\infty)$ ώστε $h(\chi_0)=0 \Leftrightarrow 3\chi_0 - \eta\mu^2\chi_0 - 1 = 0$ άρα η εξίσωση $3\chi - \eta\mu^2\chi = 1$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$

$$(α) \rightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\chi \cdot \left(3 - \frac{\eta\mu^2\chi}{\chi} - \frac{1}{\chi} \right) \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{\eta\mu^2\chi}{\chi} - \frac{1}{\chi} \right)$$

Θυμηθείτε από τις μεθόδους ορίων την αντιμετώπιση του προβλήματος $\eta\mu(\pm\infty)$

$$\text{όμως } \left| \frac{\eta\mu^2\chi}{\chi} \right| \leq \frac{1}{|\chi|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|\chi|} \leq \frac{\eta\mu^2\chi}{\chi} \leq \frac{1}{|\chi|} \quad \text{και} \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\chi|} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|\chi|} \right) = 0 \quad \text{άρα από το}$$

$$\text{κριτήριο παρεμβολής θα είναι } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu^2\chi}{\chi} = 0 \quad (α)$$

Π.Χ. 5) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, \alpha]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$, και $f(0) = \frac{1}{e}$, $f(\alpha) = \frac{1}{e^{\sigma\upsilon\nu\alpha}}$. Δείξτε ότι υπάρχει $\chi_0 \in (0, \alpha)$ ώστε $f'(\chi_0) = \eta\mu\chi_0 \cdot f(\chi_0)$

Λύση

ΣΚΕΨΗ

Προσπαθώ να βρω συνάρτηση $F(x)$, ώστε: $F'(\chi_0) = f'(\chi_0) - \eta\mu\chi_0 \cdot f(\chi_0)$, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle η $F'(\chi_0) = 0$ να συνεπάγεται $f'(\chi_0) - \eta\mu\chi_0 \cdot f(\chi_0) = 0$. Έχω λοιπόν $f'(\chi_0) - \eta\mu\chi_0 \cdot f(\chi_0) = 0 \Rightarrow e^{\sigma\upsilon\nu\chi_0} f'(\chi_0) - e^{\sigma\upsilon\nu\chi_0} \cdot \eta\mu\chi_0 \cdot f(\chi_0) = 0 \Rightarrow e^{\sigma\upsilon\nu\chi_0} f'(\chi_0) + (e^{\sigma\upsilon\nu\chi_0})' \cdot f(\chi_0) = 0 \Rightarrow (e^{\sigma\upsilon\nu\chi_0} \cdot f(\chi_0))' = 0$ άρα θα πρέπει: $F(\chi) = e^{\sigma\upsilon\nu\chi} \cdot f(\chi)$

Θυμήσου πως βρίσκουμε την αρχική συνάρτηση περίπτωση 6B

Θεωρώ την $F(\chi) = e^{\sigma\upsilon\nu\chi} \cdot f(\chi)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με $F'(\chi) = (e^{\sigma\upsilon\nu\chi} \cdot f(\chi))' = e^{\sigma\upsilon\nu\chi} f'(\chi) + (e^{\sigma\upsilon\nu\chi})' \cdot f(\chi) = e^{\sigma\upsilon\nu\chi} f'(\chi) - e^{\sigma\upsilon\nu\chi} \cdot \eta\mu\chi \cdot f(\chi) = e^{\sigma\upsilon\nu\chi} \cdot (f'(\chi) - \eta\mu\chi \cdot f(\chi))$

$$\left. \begin{aligned} \text{Έχω } F(0) &= e^{\sigma\upsilon\nu 0} \cdot f(0) = e \cdot \frac{1}{e} = 1 \\ F(\alpha) &= e^{\sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot f(\alpha) = e^{\sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot \frac{1}{e^{\sigma\upsilon\nu\alpha}} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F(0) = F(\alpha)$$

Παρατηρώ λοιπόν ότι η F ικανοποιεί τις τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\chi_0 \in (0, \alpha)$ ώστε $F'(\chi_0) = 0 \Rightarrow e^{\sigma\upsilon\nu\chi_0} \cdot (f'(\chi_0) - \eta\mu\chi_0 \cdot f(\chi_0)) = 0 \Rightarrow$

$$f'(\chi_0) = \eta\mu\chi_0 \cdot f(\chi_0) \quad (\text{αφού } e^{\sigma\upsilon\nu\chi_0} > 0 \quad \forall \chi_0 \in \mathbb{R})$$

Π.Χ. 6) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(-1) < 0 < f(1)$. Δείξτε ότι
(i) η $g(x) = (\chi^2 - 1) \cdot f(\chi)$ έχει τουλάχιστο δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $(-1, 1)$
(ii) η εξίσωση $f'(\chi) = \frac{-2\chi}{\chi^2 - 1} \cdot f(\chi)$ έχει τουλάχιστο δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$

Λύση

(i) Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων), για να δείξω ότι έχει τουλάχιστο δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $(-1, 1)$, αρκεί να δείξω ότι υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in (-1, 1)$ ώστε $g'(\chi_1) = g'(\chi_2) = 0$

ΣΚΕΨΗ

πρέπει να χωρίσω κατάλληλα το διάστημα $(-1, 1)$ σε δύο υπο-διαστήματα $(-1, \gamma)$ και $(\gamma, 1)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) \cdot f(1) < 0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano άρα υπάρχει $\gamma \in (-1, 1)$ ώστε $f(\gamma) = 0$ (1)

Για τη g έχω ότι

είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, \gamma]$ και $[\gamma, 1]$ (ως γινόμενο συνεχών) είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, \gamma)$ και $(\gamma, 1)$ με

$$g'(x) = ((x^2 - 1) \cdot f(x))' = 2x \cdot f(x) + (x^2 - 1) \cdot f'(x)$$

και ακόμα $g(-1) = 0$, $g(\gamma) = (\gamma^2 - 1) \cdot f(\gamma) = 0$ (από (1)) και $g(1) = 0$ άρα

$g(-1) = g(\gamma) = g(1)$ άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle σε καθένα από τα διαστήματα

$[-1, \gamma]$ και $[\gamma, 1]$ άρα υπάρχουν $\chi_1 \in (-1, \gamma)$ και $\chi_2 \in (\gamma, 1)$ ώστε $g'(\chi_1) = g'(\chi_2) = 0$

Άρα η g έχει τουλάχιστο δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $(-1, 1)$

(ii) Από το (i) ερώτημα έχω δείξει ότι υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in (-1, 1)$ ώστε $g'(\chi_1) = g'(\chi_2) = 0$

Δηλ. έχω δείξει ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει τουλάχιστο δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$

τις χ_1, χ_2 . Χάριν συντομίας συμβολίζω με χ_κ τις τιμές χ_1 και χ_2 (προφανώς $\chi_\kappa \neq \pm 1$)

$$\text{Όμως } g'(\chi_\kappa) = 0 \Leftrightarrow 2\chi_\kappa \cdot f(\chi_\kappa) + (\chi_\kappa^2 - 1) \cdot f'(\chi_\kappa) = 0 \Leftrightarrow f'(\chi_\kappa) = \frac{-2\chi_\kappa}{\chi_\kappa^2 - 1} \cdot f(\chi_\kappa), \kappa=1,2$$

άρα η εξίσωση $f'(x) = \frac{-2x}{x^2 - 1} \cdot f(x)$ έχει τουλάχιστο δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$ τις χ_1 και χ_2

Π.Χ. 7) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σημεία $A(\chi_1, f(\chi_1))$, $B(\chi_2, f(\chi_2))$ στα οποία η εφαπτόμενη της C_f δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες, υπάρχει σημείο $\Gamma(\chi_0, f(\chi_0))$ στο οποίο ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης της C_f , ισούται με τον αριθμητικό μέσο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτόμενων στα σημεία A και B

Λύση

Έχω $f'(\chi_1) \neq f'(\chi_2)$ και θέλω να δείξω ότι $\exists \chi_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f'(\chi_0) = \frac{f'(\chi_1) + f'(\chi_2)}{2}$

Έστω ότι $\chi_1 < \chi_2$. Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα έχω ότι η f' θα είναι συνεχής στο $[\chi_1, \chi_2]$, άρα από το θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής θα υπάρχουν

$$\xi_1, \xi_2 \in [\chi_1, \chi_2] \text{ ώστε } m = f'(\xi_1) \leq f'(\chi) \leq f'(\xi_2) = M \quad \forall \chi \in [\chi_1, \chi_2] \quad (1)$$

$$\text{Απο (1) για } \chi = \chi_1 \text{ έχω: } m \leq f'(\chi_1) \leq M \quad \left. \begin{array}{l} \text{για } \chi = \chi_2 \text{ έχω: } m \leq f'(\chi_2) \leq M \end{array} \right\} \xrightarrow[f'(\chi_1) \neq f'(\chi_2)]{ (+)} 2m < f'(\chi_1) + f'(\chi_2) < 2M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m < \frac{f'(\chi_1) + f'(\chi_2)}{2} < M$$

Άρα από το θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών θα

$$\text{υπάρχει } \chi_0 \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\chi_1, \chi_2) \text{ ώστε } f'(\chi_0) = \frac{f'(\chi_1) + f'(\chi_2)}{2}$$

82) Μας ζητούν να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ μια ρίζα (ή ότι υπάρχει το πολύ ένα χ_0 που ικανοποιεί μια ισότητα)

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ 1^η Σκέψη Εύρεση της μονοτονίας της συνάρτησης που αντιστοιχεί στην εξίσωση. (Ισχύει: αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη σ' ένα διάστημα Δ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ)

2^η Σκέψη Απαγωγή εις άτοπο και χρήση του θεωρήματος Rolle στη συνάρτηση που αντιστοιχεί στην εξίσωση (Δηλ. λες «έστω ότι έχει δύο ρίζες (μια περισσότερη απ' ό,τι μας ζητούν) τις $\rho_1 < \rho_2$ τότε η συνάρτηση που αντιστοιχεί στην εξίσωση είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x) = (\text{την υπολογίζω})$, και ισχύει $f(\rho_1) = 0 = f(\rho_2)$ άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με $f'(\xi) = 0$)

(εδώ ψάχνω για άτοπο)

3^η Σκέψη Για πολυωνυμικές εξισώσεις ισχύει ότι: έχουν το πολύ τόσες ρίζες όσες είναι ο βαθμός τους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν ζητούν να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει το πολύ δύο (ή περισσότερες) ρίζες (ή ότι υπάρχουν το πολύ δύο (ή περισσότερα) χ_k που ικανοποιούν μια δοσμένη ισότητα) εργαζόμαστε αντίστοιχα

παράδειγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Δείξτε ότι η εξίσωση $\ln^3 \chi + \kappa \ln^2 \chi + (\kappa^2 + 1) \ln \chi + 1 = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$

Λύση

1^{ος} Τρόπος Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln^3 \chi + \kappa \ln^2 \chi + (\kappa^2 + 1) \ln \chi + 1$, $\chi \in (0, +\infty)$

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$

Έχω ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (\ln^3 \chi + \kappa \ln^2 \chi + (\kappa^2 + 1) \ln \chi + 1)' = 3 \ln^2 \chi \cdot \frac{1}{\chi} + 2\kappa \ln \chi \cdot \frac{1}{\chi} + (\kappa^2 + 1) \cdot \frac{1}{\chi} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{\chi} \cdot (3 \ln^2 \chi + 2\kappa \ln \chi + (\kappa^2 + 1)), \chi \in (0, +\infty)$$

Όμως το $3 \ln^2 \chi + 2\kappa \ln \chi + (\kappa^2 + 1)$ είναι τριώνυμο ως προς $\ln \chi$ με διακρίνουσα

$$\Delta = (2\kappa)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (\kappa^2 + 1) = -8\kappa^2 - 12 < 0 \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}$$

άρα $3 \ln^2 \chi + 2\kappa \ln \chi + (\kappa^2 + 1) > 0 \quad \forall \chi \in (0, +\infty)$ άρα $f'(x) > 0 \quad \forall \chi \in (0, +\infty)$ άρα f ↗

στο $(0, +\infty)$ άρα η C_f τέμνει το πολύ μια φορά τον άξονα $\chi' \chi$ άρα η εξίσωση

$f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$

Έστω ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$ τις $\rho_1 < \rho_2$

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln^3 x + \kappa \ln^2 x + (\kappa^2 + 1) \ln x + 1$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$

Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x) = (\ln^3 x + \kappa \ln^2 x + (\kappa^2 + 1) \ln x + 1)'$ $\Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (3 \ln^2 x + 2\kappa \ln x + (\kappa^2 + 1))$$

Ακόμα έχω

$$f(\rho_1) = \ln^3 \rho_1 + \kappa \ln^2 \rho_1 + (\kappa^2 + 1) \ln \rho_1 + 1 = 0 = \ln^3 \rho_2 + \kappa \ln^2 \rho_2 + (\kappa^2 + 1) \ln \rho_2 + 1 = 0 = f(\rho_2)$$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ άρα $\exists \xi \in (\rho_1, \rho_2)$

$$\text{ώστε } f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} \cdot (3 \ln^2 \xi + 2\kappa \ln \xi + (\kappa^2 + 1)) = 0 \Leftrightarrow 3 \ln^2 \xi + 2\kappa \ln \xi + (\kappa^2 + 1) = 0 \quad (1)$$

Αδύνατο αφού η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς $\ln \xi$ με διακρίνουσα

$$\Delta = (2\kappa)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (\kappa^2 + 1) = -8\kappa^2 - 12 < 0 \quad \forall \kappa \in \mathbb{R} \quad \text{Άρα}$$

η εξίσωση $\ln^3 x + \kappa \ln^2 x + (\kappa^2 + 1) \ln x + 1 = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$

Π.χ 2) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\ln(f^2(x) + 3) = f(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει ότι $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ή ότι υπάρχουν μεμονομένα $x_k \in \mathbb{R}$, ώστε $f'(x_k) = 0$, και εκατέρωθεν αυτών των x_k η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο (Α)

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $h(x) = \ln(f^2(x) + 3) - f(x)$ η οποία ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ (αφού $f^2(x) + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$) και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με :

$$h'(x) = (\ln(f^2(x) + 3) - f(x))' = \frac{1}{f^2(x) + 3} \cdot (f^2(x) + 3)' - f'(x) \Rightarrow \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \Rightarrow h'(x) = \frac{-f^2(x) + 2f(x) - 3}{f^2(x) + 3} \cdot f'(x), x \in \mathbb{R}$$

Η παράσταση $-f^2(x) + 2f(x) - 3$ είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα

$$\Delta = -8 < 0 \quad \text{άρα } -f^2(x) + 2f(x) - 3 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ακόμα έχω $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (από (Α)) και $f^2(x) + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\frac{-f^2(\chi)+2f(\chi)-3}{f^2(\chi)+3} \cdot f'(\chi) \leq 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R} \text{ δηλ. } h'(\chi) \leq 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R} \quad (\text{και η περίπτωση } h'(\chi) = 0$$

μόνο για μεμονομένες τιμές του χ εκατέρωθεν των οποίων η $h'(\chi)$ δεν αλλάζει πρόσημο)

άρα h $\nearrow$ άρα η C_h τέμνει το πολύ μια φορά τον άξονα $\chi\chi$ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ και

συνεπώς η εξίσωση $\ln(f^2(\chi)+3) = f(\chi)$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρήστε ότι δεν είναι δυνατή η επίλυση αυτής της άσκησης με το 2^ο τρόπο (κάτι που φαίνεται στη παρακάτω προσπάθεια)

Έστω ότι η εξίσωση $\ln(f^2(\chi)+3) = f(\chi)$ έχει δύο ρίζες τις $\rho_1 < \rho_2$ (α)

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $h(\chi) = \ln(f^2(\chi)+3) - f(\chi)$, $\chi \in [\rho_1, \rho_2]$

Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $h'(\chi) = \frac{-f^2(\chi)+2f(\chi)-3}{f^2(\chi)+3} \cdot f'(\chi)$

Ακόμα έχω

$$h(\rho_1) = \ln(f^2(\rho_1)+3) - f(\rho_1) = 0 = \ln(f^2(\rho_2)+3) - f(\rho_2) = h(\rho_2) \quad (\text{από (α)})$$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την h στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ άρα $\exists \xi \in (\rho_1, \rho_2)$ με $h'(\xi) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{-f^2(\xi)+2f(\xi)-3}{f^2(\xi)+3} \cdot f'(\xi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -f^2(\xi)+2f(\xi)-3 = 0 & \text{αδύνατο (τριώνυμο ως προς } f(\xi) \text{ με } \Delta = -8 < 0) \\ \text{ή} \\ f'(\xi) = 0 & \text{που δεν αποκλείεται να ισχύει για κάποιο } \xi \in (\rho_1, \rho_2) \end{cases}$$

Δείτε στο αντιπαράδειγμα όπου $f'(0) = 0$

Αντιπαράδειγμα:

$f(\chi) = \chi^3$ οπότε $\leftarrow$ (Προφανώς $f \nearrow$)

$$h(\chi) = \ln(\chi^6+3) - \chi^3 \quad \text{και}$$

$$h'(\chi) = \frac{-\chi^6+2\chi^3-3}{\chi^6+3} \cdot 3\chi^2$$

$$\text{και έχω: } h'(0) = 0$$

$$\text{και } f'(\chi) = 3\chi^2 > 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^*$$

- Π.Χ. 3) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι η εφαπτόμενη της σε κάθε σημείο της $A(\kappa, f(\kappa))$ δε έχει κοινό σημείο με την ευθεία: $(\varepsilon) y = (6\kappa+1)\chi - 2$. Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x) = 3x^3 + 5x + 4$ έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Λύση

Έστω ότι έχουν δύο κοινά σημεία με τετμημένες $\rho_1 < \rho_2$ τότε

$$f(\rho_1) = g(\rho_1) = 3\rho_1^3 + 5\rho_1 + 4 \quad \text{και} \quad f(\rho_2) = g(\rho_2) = 3\rho_2^3 + 5\rho_2 + 4 \quad (\alpha)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $h(\chi) = f(\chi) - g(\chi) = f(\chi) - 3\chi^3 - 5\chi - 4$ Έχω ότι:

η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως διαφορά συνεχών (f παρ/μη άρα συνεχής και η g ως πολ/κή)

η h είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $h'(\chi) = (f(\chi) - 3\chi^3 - 5\chi - 4)'$ $\Rightarrow$

$$h'(\chi) = f'(\chi) - 6\chi - 5$$

$$\text{Ακόμα } h(\rho_1) = f(\rho_1) - 3\rho_1^3 - 5\rho_1 - 4 = 0 = f(\rho_2) - 3\rho_2^3 - 5\rho_2 - 4 = h(\rho_2) \quad (\text{από } (\alpha))$$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την h στο διάστημα $[p_1, p_2]$ άρα $\exists \xi \in (p_1, p_2)$

$$\text{ώστε: } h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 6\xi - 5 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 6\xi + 5$$

Δηλ. η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 6\xi + 5$

Όμως από υπόθεση έχω ότι η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη

με την ευθεία $(\varepsilon) \quad y = (6\xi + 1)x - 2$ άρα θα πρέπει $6\xi + 5 = 6\xi + 1 \Leftrightarrow 5 = 1$ Αδύνατο

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

83) Μας ζητούν να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μόνο μια ρίζα (ή ότι υπάρχει μόνο ένα χ_0 που ικανοποιεί μια ισότητα)

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ 1^η Σκέψη Αν είναι εύκολο για τη συνάρτηση που αντιστοιχεί στην εξίσωση, βρές τη μονοτονία – ακρότατα – οριακές τιμές της (εργασία εύρεσης $f(A)$) οπότε βρίσκεις με ακρίβεια το πλήθος ριζών της (ανάλογα με το πόσες φορές η f αλλάζει πρόσημο.)

2^η Σκέψη Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση που αντιστοιχεί στην εξίσωση έχει (α) τουλάχιστο μία ρίζα
(β) το πολύ μία ρίζα
οπότε από (α) και (β) συμπεραίνω ότι θα έχει μόνο μια ρίζα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν ζητούν να δείξουμε ότι μια εξίσωση έχει ακριβώς δύο (ή περισσότερες) ρίζες (ή ότι υπάρχουν ακριβώς δύο (ή περισσότερα) χ_0 που ικανοποιούν μια δοσμένη ισότητα) εργαζόμαστε αντίστοιχα

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ 1) Δείξτε ότι η εξίσωση $2\chi^3 - 3\chi^2 - 12\chi + 1 = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$

Λύση

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2\chi^3 - 3\chi^2 - 12\chi + 1$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6\chi^2 - 6\chi - 12$, $\chi \in \mathbb{R}$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του προσήμου της f' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις οριακές τιμές της f

χ	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	8	-19	$+\infty$	

Έχω: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 8$,

$f(2) = -19$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Ακόμα έχω: $f \nearrow$ στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[2, +\infty)$ και $f \searrow$ στο διάστημα $[-1, 2]$

Άρα για $\chi \in (-\infty, -1]$ έχω $f(x) \in (-\infty, 8]$ και επειδή $0 \in (-\infty, 8]$ και $f \nearrow$ έχω ότι

υπάρχει ακριβώς ένα $\rho_1 \in (-\infty, -1)$ ώστε $f(\rho_1) = 0$ (α)

για $\chi \in [-1, 2]$ έχω $f(\chi) \in [-19, 8]$ και επειδή $0 \in [-19, 8]$ και f έχω ότι υπάρχει

ακριβώς ένα $\rho_2 \in (-1, 2)$ ώστε $f(\rho_2) = 0$ (β)

για $\chi \in [2, +\infty)$ έχω $f(\chi) \in [-19, +\infty)$ και επειδή $0 \in [-19, +\infty)$ και f έχω ότι

υπάρχει ακριβώς ένα $\rho_3 \in (2, +\infty)$ ώστε $f(\rho_3) = 0$ (γ)

Από (α), (β), (γ) έχω ότι η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$ τις ρ_1, ρ_2, ρ_3

π.χ. 2) Δείξτε ότι η εξίσωση $2^x + 3^x = 5$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

Λύση

Παρατηρώ ότι η τιμή $\chi = 1$ την επαληθεύει άρα η εξίσωση έχει τουλάχιστο μια ρίζα (α)

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2^x + 3^x - 5$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 3^x \cdot \ln 3$, $x \in \mathbb{R}$

Έχω: $2^x > 0$ και $3^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και ακόμα $\ln 2 > 0$ και $\ln 3 > 0$ (αφού $\ln x > 0$ όταν $x > 1$)

Άρα $2^x \cdot \ln 2 + 3^x \cdot \ln 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα f $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα η εξίσωση έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ (β)

Από (α) και (β) έχω ότι η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$, την $\chi = 1$

π.χ. 3) Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση f $n^{\text{ου}}$ βαθμού με n διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n - 1$ ρίζες

Λύση

Έστω $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \dots < \rho_n$ οι n διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες. Για τη συνάρτηση $f(x)$

έχω: η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], \dots, [\rho_{n-1}, \rho_n]$ ως πολυωνυμική

η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), \dots, (\rho_{n-1}, \rho_n)$

ως πολυωνυμική

Ακόμα $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = \dots = f(\rho_{n-1}) = f(\rho_n) = 0$ (αφού $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ οι ρίζες)

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα, άρα

υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2), \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3), \dots, \xi_{n-1} \in (\rho_{n-1}, \rho_n)$ ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \dots = f'(\xi_{n-1}) = 0$

Άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστο $n-1$ ρίζες (α) Επειδή όμως $f(x)$ είναι πολυώνυμο $n^{\text{ου}}$ βαθμού θα έχω ότι $f'(x)$ είναι πολυώνυμο $n-1$ βαθμού άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει το πολύ $n-1$ ρίζες (β)

Από (α) και (β) έχω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες

9) Για ασκήσεις όπου μας ζητούν να αποδείξουμε ότι ισχύει μια ανίσωση (η σκέψη οδηγείται, κυρίως, σε μονοτονία – ακρότατα ή Θ.Μ.Τ.)

9₁) Η ανίσωση έχει μόνο μια μεταβλητή

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ 1^η Σκέψη Αν από προηγούμενο ερώτημα έχεις βρεί τη μονοτονία (ή το ακρότατο) μιας συνάρτησης τότε από το ακρότατο πολύ πιθανό να αποδεικνύεται η ζητούμενη ανίσωση (υπενθυμίζω ότι αν στο $x_0 \in \Delta$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο τότε θα ισχύει $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \Delta$ ενώ αν η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο τότε θα ισχύει $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \Delta$)

2^η Σκέψη • Φέρνεις όλους τους όρους της ανίσωσης στο 1^ο μέλος

• Θεωρείς τη συνάρτηση f που προκύπτει (για όπου ορίζεται)

• Βρίσκεις τη μονοτονία της f

• Ο περιορισμός της f στο διάστημα που θέλει η άσκηση δίνει ακρότατα που με τη σειρά τους δίνουν τη ζητούμενη ανίσωση.

3^η Σκέψη Εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλο διάστημα της μορφής $[a, \chi]$ ή $[\chi, a]$, όπου χ η μεταβλητή και a αριθμός ο οποίος

"μαντεύεται" από τη διαφορά $\frac{f(\chi) - f(a)}{\chi - a}$ **Κάνεις τα εξής:**

• Βρίσκεις στη ζητούμενη ανίσωση τη διαφορά $f(\chi) - f(a)$ ή το

κλάσμα $\frac{f(\chi) - f(a)}{\chi - a}$

• Ορίζεις συνάρτηση $f(t)$ στο $[a, \chi]$ (αν $\chi > a$) ή $[\chi, a]$ (αν $\chi < a$)

• Εξασφαλίζεις ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. και άρα θα υπάρχει $\xi \in (a, \chi)$ ή (χ, a) ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\chi) - f(a)}{\chi - a} \Rightarrow f(\chi) = (\chi - a) \cdot f'(\xi) + f(a) \quad (1)$$

• Αντικαθιστάς το $f(\chi)$ (που βρήκες από την (1)) στη ζητούμενη ανίσωση και καταλήγεις σε κάτι που ισχύει

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

ii) Δείξτε ότι ισχύει $e^x \geq x^e \quad \forall \quad x \in (0, +\infty)$

Λύση

i) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x > 0$ άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $A_f = (0, +\infty)$ στο οποίο η f είναι συνεχής ως πηλίκου των συνεχών $\ln x$ και x

$$\text{Έχω } f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \quad \text{άρα} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της f' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της f και τα ακρότατά της

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Άρα θα έχω:

$f \nearrow$ για $x \in (0, e]$

$f \searrow$ για $x \in [e, +\infty)$ και ότι η f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό μέγιστο) στο σημείο :

$$A(e, f(e)) = (e, 1/e)$$

ii) Από το (i) ερώτημα έχω ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $A(e, f(e))$

$$\text{Άρα θα ισχύει: } f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} e \cdot \ln x \leq x \cdot \ln e \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x^e \leq e^x \quad \forall \quad x \in (0, +\infty)$$

π.χ. 2) Δείξτε ότι ισχύει: $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \forall \quad x > 0$

Λύση

$$\text{Αρκεί να δείξω ότι } e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 > 0 \quad \forall \quad x > 0$$

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο: $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$ η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι

συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Έχω } f'(x) = \left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 \right)' \Rightarrow$$

$$f'(x) = e^x - 1 - x, x \in \mathbb{R}$$

Προφανώς $f'(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$ άρα η τιμή

$x=0$ είναι μια ρίζα της $f'(x) = 0$ (1)

$$f''(x) = (e^x - 1 - x)' \Rightarrow f''(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ - ΣΥΜΒΟΥΛΗ αν μας είναι "δύσκολο" να βρούμε τα πρόσημα μιας παράστασης $A(x)$, (εδώ της $f'(x)$) τότε βρίσκουμε τη μονοτονία της (εδώ με τη βοήθεια της $f''(x)$) και τις ρίζες της. Αν ρ είναι μια ρίζα της $A(x)=0$ και $A(x) \nrightarrow$ σ' ένα διάστημα Δ με $\rho \in \Delta$ τότε θα έχεις $A(x) > 0$ για $x > \rho$ και $A(x) < 0$ για $x < \rho$. Αντίστοιχα αν $A(x) \nrightarrow$ τότε θα έχεις $A(x) < 0$ για $x > \rho$ και $A(x) > 0$ για $x < \rho$ (ίσως η παραπάνω εργασία να χρειαστεί να γίνει για τα πρόσημα δύο - τριών συνεχόμενων παραστάσεων)

Από τον παρακάτω πίνακα όπου φαίνονται τα πρόσημα της $f''(x)$ βρίσκω τη μονοτονία της $f'(x)$ και σε συνδυασμό με το ότι $f'(0) = 0$ βρίσκω τα πρόσημα της $f'(x)$ και άρα τη μονοτονία και τα ακρότατα της f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\nearrow +$	0	$\nearrow +$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Παρατηρώ ότι η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(0, f'(0))$ άρα έχω $f'(x) \geq f'(0) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (και $f'(x) = 0$ μόνο για $x = 0$) άρα έχω $f \nrightarrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα για $x > 0$ θα έχω $f(x) > f(0) \Rightarrow$
 $e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 > 0 \Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

π.χ 3) Δείξτε ότι ισχύει: $1 < \frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$

Λύση

1ος Τρόπος

Θα αποδείξω τη ζητούμενη ανίσωση αποδεικνύοντας πρώτα ότι $1 < \frac{\ln x}{x-1} \Leftrightarrow 1 - \frac{\ln x}{x-1} < 0$ (1)

και μετά ότι $\frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x-1} - \frac{1}{x} < 0$ (2) για $x \in (0, 1)$

ΣΚΕΨΤΗ

Αν, για την απόδειξη της (1), θεωρούσα τη συνάρτηση $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x-1}$ θα είχα $f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$, παράσταση αρκε-

τά δύσκολη για να βρω τα πρόσημά της. Για το λόγο αυτό μετατρέπω την (1) στην ισοδυναμική της $x - 1 - \ln x > 0$ (απαλοιφή παρονομαστών, με $x - 1 < 0$ αφού $x < 1$). Έτσι θεωρώντας την $f(x) = x - 1 - \ln x$ θα έχω $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

παράσταση πολύ πιο εύκολη ως προς την εύρεση των προσημών. Γενικά συναρτήσεις όπως τις $\ln x, \int_a^x f(t)dt$

{ που έχουν την ιδιότητα παραγωγιζόμενες να αλλάζει η "δομή" τους: $(\ln x)' = 1/x, (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$ }

προσπαθώ να τις απομονώνω στις σχέσεις που δίνονται ή ζητούνται στην άσκηση. Έτσι η συνάρτηση που θεωρώ για την επίλυση της άσκησης, θα δίνει παράγωγο πιο εύκολη ως προς την εύρεση των προσημών της. Ανάλογα σκέφτομαι και για την απόδειξη της (2)

↓δες ελεγχόμενο

$$(1) \quad \stackrel{x-1 < 0}{\Leftrightarrow} \quad x-1-\ln x > 0 \text{ για } x \in (0, 1)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f_1(x) = x-1-\ln x$ Ορίζεται για $x > 0$ και είναι συνεχής

ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμη με $f_1'(x) = (x-1-\ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $x > 0$

$$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ και } f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της f' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της f και τα ακρότατά της

x	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$		-	+
$f_1(x)$			

Άρα έχω $f_1 \searrow$ στο διάστημα $(0, 1]$ άρα για $x < 1$, έχω $f_1(x) > f_1(1) \Leftrightarrow x-1-\ln x > 0 \Leftrightarrow x-1 > \ln x \stackrel{x-1 < 0}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{\ln x}{x-1}$ (α)

$$(2) \quad \stackrel{x(x-1) < 0}{\Leftrightarrow} \quad x \ln x - x + 1 > 0 \text{ για } x \in (0, 1)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f_2(x) = x \ln x - x + 1$ Ορίζεται για $x > 0$ και είναι συνεχής

ως διαφορά συνεχών και παρ/μη με $f_2'(x) = (x \ln x - x + 1)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$, $x > 0$

$$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ και } f_2'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της f' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της f και τα ακρότατά της

x	0	1	$+\infty$
$f_2'(x)$		-	+
$f_2(x)$			

Άρα έχω $f_2 \searrow$ στο διάστημα $(0, 1]$ άρα για $x < 1$ έχω $f_2(x) > f_2(1) \Leftrightarrow x \ln x - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \ln x > x-1 \stackrel{x(x-1) < 0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{x}$ (β)

Τελικά από (α), (β) έχω ότι για $x \in (0, 1)$ θα ισχύει: $1 < \frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{x}$

2ος Τρόπος

ΣΚΕΨΗ

Παρατηρώ ότι το κλάσμα $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - 0}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$ ταυνιάζει με το $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ άρα

"μαντεύω" ότι $f(t) = \ln t$ και ότι το Θ.Μ.Τ. θα το εφαρμόσω στο διάστημα $[x, 1]$

(αφού από υπόθεση έχω: $x < 1$)

(κοίτα 91 περίπτωση - 3η σκέψη)

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f(t) = \ln t$, $t > 0$ Έστω $\chi \in (0, 1)$

Περιορίζω την $f(t)$ στο $[\chi, 1]$ και έχω:

- f συνεχής στο $[\chi, 1]$ ως λογαριθμική
 - f παραγωγίσιμη στο $(\chi, 1)$ με $f'(t) = \frac{1}{t}$
- Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. και άρα υπάρχει αριθμός $\xi \in (\chi, 1)$ ώστε
- $$f'(\xi) = \frac{f(\chi) - f(1)}{\chi - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \chi}{\chi - 1} \quad (1)$$

Θέλω να δείξω ότι ισχύει: $1 < \frac{\ln \chi}{\chi - 1} < \frac{1}{\chi} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\chi} \stackrel{\chi, \xi > 0}{\Leftrightarrow} 1 > \xi > \chi$ που ισχύει αφού $\xi \in (\chi, 1)$

Άρα για κάθε $\chi \in (0, 1)$ θα ισχύει $1 < \frac{\ln \chi}{\chi - 1} < \frac{1}{\chi}$

Π.Χ. 4) Δείξτε ότι $\chi + 1 \leq e^\chi \leq \chi \cdot e^\chi + 1$, $\chi \in \mathbb{R}$

Λύση

♦ Αν $\chi > 0$, τότε η ζητούμενη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$\chi \leq e^\chi - 1 \leq \chi \cdot e^\chi \stackrel{\chi > 0}{\Leftrightarrow} 1 \leq \frac{e^\chi - 1}{\chi} \leq e^\chi$$

$$1 \leq \frac{e^\chi - e^0}{\chi - 0} \leq e^\chi$$

Θεωρώ την συνάρτηση $f(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$ Περιορίζω την $f(t)$ στο $[0, \chi]$ και έχω:

- f συνεχής στο $[0, \chi]$ ως εκθετική
 - f παραγωγίσιμη στο $(0, \chi)$ με $f'(t) = e^t$
- Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. και άρα υπάρχει αριθμός $\xi \in (0, \chi)$ ώστε
- $$f'(\xi) = \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^\chi - 1}{\chi} \quad (1)$$

Θέλω να δείξω ότι ισχύει: $1 \leq \frac{e^\chi - 1}{\chi} \leq e^\chi \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 \leq e^\xi \leq e^\chi \Leftrightarrow e^0 \leq e^\xi \leq e^\chi \stackrel{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} 0 \leq \xi \leq \chi$ που

ισχύει αφού $\xi \in (0, \chi)$ Άρα για κάθε $\chi > 0$ θα ισχύει $[0, \chi]$

Άλλος τρόπος απόδειξης της παραπάνω ανίσωσης

Επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα και $0 < \xi < \chi$, έχουμε $e^0 < e^\xi < e^\chi \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^\chi - 1}{\chi} < e^\chi$

♦ ♦ Αν $\chi < 0$ τότε η απόδειξη είναι ανάλογη, μόνο που τώρα χρησιμοποιούμε το διάστημα

$$[\chi, 0] \text{ και δείχνουμε ότι } 1 \geq \frac{e^\chi - 1}{\chi} \geq e^\chi$$

♦ ♦ ♦ Αν $\chi = 0$ τότε η ανισότητα γίνεται $0 + 1 \leq e^0 \leq 0 \cdot e^0 + 1$ που ισχύει με το "ίσον"

Τελικά έχω ότι ισχύει $\chi + 1 \leq e^\chi \leq \chi \cdot e^\chi + 1$, $\forall \chi \in \mathbb{R}$

92) Η ανίσωση έχει δύο μεταβλητές

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ 1^η Σκέψη

Αν από προηγούμενο ερώτημα έχεις βρει τη μονοτονία μιας συνάρτησης f τότε από την ανισωτική σχέση που υπάρχει μεταξύ των δύο μεταβλητών και τη μονοτονία της f αποδεικνύεις τη ζητούμενη ανίσωση

2^η Σκέψη

Εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. Αν α, β οι μεταβλητές τότε:

- Βρίσκεις στη ζητούμενη ανίσωση τη διαφορά $f(\beta) - f(\alpha)$

ή το κλάσμα $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

- Ορίζεις συνάρτηση $f(\chi)$ στο $[\alpha, \beta]$ (αν $\beta > \alpha$) ή $[\beta, \alpha]$ (αν $\beta < \alpha$)

- Εξασφαλίζεις ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του

Θ.Μ.Τ. και άρα θα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ή (β, α) ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) \cdot f'(\xi) \quad (1)$$

- Αντικαθιστάς στη ζητούμενη ανίσωση όπου $f(\beta) - f(\alpha)$ το $(\beta - \alpha) \cdot f'(\xi)$ (που βρήκες από την (1)) και καταλήγεις σε κάτι που ισχύει

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

- π.χ. 1) (i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \chi - \eta\mu\chi$, $\chi \in \mathbb{R}$
 (ii) Δείξτε την ισοδυναμία $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < \eta\mu\alpha - \eta\mu\beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Λύση

- (i) Η συνάρτηση ορίζεται $\forall \chi \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, και παραγωγίσιμη

$$\text{με } f'(\chi) = (\chi - \eta\mu\chi)' \Leftrightarrow f'(\chi) = 1 - \sigma\upsilon\nu\chi, \chi \in \mathbb{R}$$

$$f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = 1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa \cdot \pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu\chi > 0 \Leftrightarrow 1 > \sigma\upsilon\nu\chi \text{ που ισχύει για κάθε } \chi \in \mathbb{R} - \{2\kappa \cdot \pi\}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της f' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της f

χ	$-\infty \dots -2\pi \quad 0 \quad 2\pi \dots +\infty$
$f'(x)$	$\dots + \dots + 0 + 0 + 0 + \dots + \dots$
$f(x)$	$\dots \nearrow \dots \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \dots$

Από τον διπλανό
πίνακα φαίνεται ότι
είναι $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$

- (ii) Από (i) έχω ότι $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow$
 $\alpha - \eta\mu\alpha < \beta - \eta\mu\beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < \eta\mu\alpha - \eta\mu\beta$

Π.Χ. 2) (Α) Δείξτε ότι για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ ισχύει: $e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta$
(Β) Δείξτε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$

Λύση

(Α)

ΣΚΕΨΗ

Παρατηρώ ότι το κλάσμα $\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}$ ταιριάζει με το $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ άρα "μαντεύω"

ότι $f(x) = e^x$ και ότι το Θ.Μ.Τ. θα το εφαρμόσω στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

(αφού από υπόθεση έχω: $\alpha < \beta$)

(κοίτα 9₂ περίπτωση - 2^η σκέψη)

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Περιορίζω την $f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ και έχω:

- f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως εκθετική
 - f παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = e^x$
- Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. και άρα υπάρχει αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε
- $$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Θέλω να δείξω ότι ισχύει: $e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta \Leftrightarrow e^\alpha < e^\xi < e^\beta \Leftrightarrow \alpha < \xi < \beta$ που ισχύει

αφού $\xi \in (\alpha, \beta)$

(Β)

ΣΚΕΨΗ

Παρατηρώ ότι η διαφορά $\sin \alpha - \sin \beta$ ταιριάζει με τη διαφορά $f(\alpha) - f(\beta)$ άρα

"μαντεύω" ότι $f(x) = \sin x$ και ότι το Θ.Μ.Τ. θα το εφαρμόσω στο διάστημα

$[\alpha, \beta]$ (αν $\alpha < \beta$) ή στο $[\beta, \alpha]$ (αν $\beta < \alpha$)

(κοίτα 9₂ περίπτωση - 2^η σκέψη)

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

♦ Αν $\alpha < \beta$ περιορίζω την $f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ και έχω:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ συνεχής στο } [\alpha, \beta] \\ \bullet f \text{ παρ/μη στο } (\alpha, \beta) \\ \text{ως τριγωνομετρική} \\ \text{με } f'(x) = -\eta\mu x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. και άρα} \\ \text{υπάρχει αριθμός } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ ώστε} \\ f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta}{\alpha - \beta} \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta = -\eta\mu\xi \cdot (\alpha - \beta) \quad (1) \end{array}$$

$$\text{Θέλω να δείξω ότι ισχύει: } |\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta| \leq |\alpha - \beta| \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |-\eta\mu\xi \cdot (\alpha - \beta)| \leq |\alpha - \beta| \Leftrightarrow$$

$$|-\eta\mu\xi| \cdot |\alpha - \beta| \leq |\alpha - \beta| \Leftrightarrow |\eta\mu\xi| \leq 1 \text{ που ισχύει } \forall \xi \in \mathbb{R}$$

♦ ♦ Αν $\alpha > \beta$ τότε κάνουμε ανάλογη απόδειξη στο διάστημα $[\beta, \alpha]$

♦ ♦ ♦ Αν $\alpha = \beta$ τότε η ανισότητα γίνεται $|\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha| \leq |\alpha - \alpha|$ που ισχύει με το "ίσον"

Τελικά έχω ότι ισχύει: $|\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta| \leq |\alpha - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Πχ 3) (α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η $f(x) = x^x, x > 0$
 (β) Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (e^{-1}, +\infty)$ ισχύει: $\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha} > \frac{\ln \alpha}{\alpha+1}$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f ορίζεται για $x \in (0, +\infty)$ άρα $A_f = (0, +\infty)$.

Ακόμα η συνάρτηση ισοδύναμα γράφεται $f(x) = e^{x \ln x}$ και είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (1 + \ln x), x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^x \cdot (1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^x \cdot (1 + \ln x) > 0 \stackrel{x^x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της f' , μπορεί εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της f .

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Άρα θα έχω:

$f \searrow$ για $x \in (0, \frac{1}{e}]$ και

$f \nearrow$ για $x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$

(β)

ΣΚΕΨΗ

Παρατηρώ ότι η ζητούμενη ανίσωση χρησιμοποιεί τους αριθμούς $\ln(\alpha+1)$, $\ln \alpha$, α , $\alpha+1$, άρα συμπεραίνω ότι θέλω να αποδείξω μια ανίσωσηανάμεσα σε δύο μεταβλητές τις α , $\alpha+1$ (προφανώς $\alpha < \alpha+1$) και σεπροηγούμενο ερώτημα έχω βρει τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^x$.Από το (α) ερώτημα έχω δείξει ότι $f \nearrow$ για $x \in [\frac{1}{e}, +\infty)$ Επειδή $\alpha \in (e^{-1}, +\infty)$ έχω

$$e^{-1} < \alpha < \alpha+1 \xrightarrow{f \nearrow} f(\alpha) < f(\alpha+1) \Leftrightarrow \alpha^{\alpha} < (\alpha+1)^{\alpha+1} \xrightarrow{\ln x \nearrow} \alpha \ln \alpha < (\alpha+1) \ln(\alpha+1) \xrightarrow{\alpha(\alpha+1) > 0} \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha} > \frac{\ln \alpha}{\alpha+1}$$

93) Η ανίσωση έχει μόνο αριθμούς

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ♦ Εφαρμόζεις το Θ.Μ.Τ. σε κατάλληλο διάστημα με άκρα συγκεκριμένους αριθμούς α , β τους οποίους βρίσκεις κάνοντας τις παρακάτω σκέψεις:

- Βρίσκεις στη ζητούμενη ανίσωση "χαρακτηριστική" συνάρτηση από κάποια "χαρακτηριστική" τιμή που συμμετέχει στη ζητούμενη ανίσωση.

(π.χ. αν στη ζητούμενη ανίσωση παρουσιάζεται ο αριθμός $e\phi\frac{7\pi}{9}$ τότε μάλλονη "χαρακτηριστική" συνάρτηση είναι η: $f(x) = e\phi x$)

- Βρίσκεις στη ζητούμενη ανίσωση τη διαφορά $f(\beta) - f(\alpha)$ "ταιριάζοντας" άλλους "χαρακτηριστικούς" αριθμούς που συμμετέχουν στη ζητούμενη ανίσωση.

(π.χ. αν στη ζητούμενη ανίσωση παρουσιάζεται η διαφορά $e\phi\frac{7\pi}{9} - \sqrt{3}$ τότε η διαφορά $f(\beta) - f(\alpha)$ είναι η: $e\phi\frac{7\pi}{9} - e\phi\frac{\pi}{3}$ άρα $\alpha = \frac{\pi}{3}$ και $\beta = \frac{7\pi}{9}$)

- ♦ ♦ Αφού, (εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ.), έχεις εξασφαλίσει ότι υπάρχει

 $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, επιλύεις ως προς τη "χαρακτη-

ριστική" τιμή και αντικαθιστάς στη ζητούμενη ανίσωση. Μετά κάνοντας πράξεις καταλήγεις σε κάτι που ισχύει.

(στο παραπάνω π.χ. θα επίλυες ως προς $e\phi\frac{7\pi}{9}$)παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Δείξτε ότι: (i) $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$ και (ii) $\sin \frac{5\pi}{18} < \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{36}$

Λύση

ΣΚΕΨΗ

- (i) Μια χαρακτηριστική τιμή της ζητούμενης ανίσωσης είναι η $\ln 2$ άρα "μαντεύω" ότι η συνάρτηση στην οποία θα εφαρμόσω το Θ.Μ.Τ είναι η $f(x) = \ln x$. Ακόμα επειδή παρουσιάζεται ο αριθμός e "μαντεύω" ότι η διαφορά $f(\beta) - f(\alpha)$ είναι η διαφορά $\ln 2 - \ln e = \ln 2 - 1$ άρα το Θ.Μ.Τ θα το εφαρμόσω στο διάστημα $[\alpha, \beta] = [2, e]$

Θεωρώ την $f(x) = \ln x$ και έχω:

- f συνεχής στο $[2, e]$ ως λογαριθμική
 - f παραγωγίσιμη στο $(2, e)$ με $f'(x) = 1/x$
- Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. και άρα υπάρχει αριθμός $\xi \in (2, e)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(e)}{2 - e}$
- $$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln 2 - 1}{2 - e} \Leftrightarrow \ln 2 = \frac{2 - e}{\xi} + 1 \quad (1)$$

Θέλω να δείξω ότι ισχύει: $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e} \Leftrightarrow 2 - \frac{e}{2} < \frac{2 - e}{\xi} + 1 < \frac{2}{e} \Leftrightarrow 1 - \frac{e}{2} < \frac{2 - e}{\xi} < \frac{2}{e} - 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{2 - e}{2} < \frac{2 - e}{\xi} < \frac{2 - e}{e} \quad \begin{matrix} 2 - e < 0 \\ 2 - e > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow 2 < \xi < e \quad \text{που ισχύει αφού } \xi \in (2, e)$$

(ii)

ΣΚΕΨΗ

Μια χαρακτηριστική τιμή της ζητούμενης ανίσωσης είναι η $\sin \frac{5\pi}{18}$ άρα "μαντεύω" ότι η συνάρτηση στην οποία θα εφαρμόσω το Θ.Μ.Τ είναι η $f(x) = \sin x$. Ακόμα παρατηρώ ότι η διαφορά $f(\beta) - f(\alpha)$ ταυνιάζει με τη διαφορά $\sin \frac{5\pi}{18} - \frac{1}{2} = \sin \frac{5\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{6}$ άρα το Θ.Μ.Τ θα το εφαρμόσω στο διάστημα $[\alpha, \beta] = \left[\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{3}\right]$

Θεωρώ την $f(x) = \sin x$ και έχω:

- f συνεχής στο $\left[\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{3}\right]$ ως τριγωνομετρική
 - f παρ/μη στο $\left(\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{3}\right)$ με $f'(x) = \cos x$
- Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. και άρα υπάρχει αριθμός $\xi \in \left(\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{3}\right)$ ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\frac{5\pi}{18}) - f(\frac{\pi}{3})}{\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow$
- $$-\eta\mu\xi = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{6}}{-\frac{\pi}{18}} \Leftrightarrow \sin \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{18} \cdot \eta\mu\xi + \frac{1}{2} \quad (1)$$

Θέλω να δείξω ότι ισχύει: $\sin \frac{5\pi}{18} < \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{36} \Leftrightarrow \frac{\pi}{18} \cdot \eta\mu\xi + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{36} \Leftrightarrow \eta\mu\xi < \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\xi < \eta\mu \frac{\pi}{3} \quad \text{που ισχύει αφού έχω } 0 < \frac{5\pi}{18} < \xi < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \text{ και είναι } \eta\mu x \nearrow \text{ στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Π.χ. 2) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[2, 5]$ και παρ/μη στο $(2, 5)$. Αν ισχύουν: $f(2) = -9$ και $-2 \leq f'(x) \leq 8 \quad \forall x \in (2, 5)$ δείξτε ότι: $|f(5)| \leq 15$

Λύση

ΣΚΕΨΗ

Μια χαρακτηριστική τιμή της ζητούμενης ανίσωσης είναι η $f(5)$ άρα "μαντεύω" ότι θα εφαρμόσω το Θ.Μ.Τ στη δοσμένη $f(x)$, προφανώς στο διάστημα $[α, β] = [2, 5]$

Για τη δοσμένη συνάρτηση f έχω:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f \text{ συνεχής στο } [2, 5] \\ \quad \text{από υπόθεση} \\ \bullet \bullet f \text{ παραγωγίσιμη στο } (2, 5) \\ \quad \text{από υπόθεση} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. και άρα υπάρχει} \\ \text{αριθμός } \xi \in (2, 5) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \\ \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(5) + 9}{3} \Leftrightarrow f(5) = 3 \cdot f'(\xi) - 9 \quad (1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Θέλω να δείξω ότι ισχύει: } |f(5)| \leq 15 &\Leftrightarrow -15 \leq f(5) \leq 15 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -15 \leq 3 \cdot f'(\xi) - 9 \leq 15 \Leftrightarrow \\ -6 \leq 3 \cdot f'(\xi) \leq 24 &\Leftrightarrow -2 \leq f'(\xi) \leq 8 \text{ που ισχύει αφού από υπόθεση έχω:} \\ &-2 \leq f'(x) \leq 8 \quad \forall x \in (2, 5) \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Προφανώς αν μας ζητήσουν να αποδείξουμε μια ανίσωση ενώ προηγουμένως έχουμε βρει τη μονοτονία μιας συνάρτησης, τότε για την απόδειξη της ανίσωσης θα στηριχθούμε στη μονοτονία που βρήκαμε.

- π.χ. 1) i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
 ii) Δείξτε ότι ισχύει $e^\pi > \pi^e$

Λύση

- i) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x > 0$ άρα το πεδίο ορισμού της είναι το:
 $A_f = (0, +\infty)$ στο οποίο η f είναι συνεχής ως πηλίκο των συνεχών $\ln x$ και x

$$\text{Έχω } f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \quad \text{άρα} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της f' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της f .

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Άρα θα έχω:

$f \nearrow$ για $x \in (0, e]$ και

$f \searrow$ για $x \in [e, +\infty)$

- ii) Από το (i) ερώτημα έχω ότι η $f \searrow$ για $x \in [e, +\infty)$

Άρα για

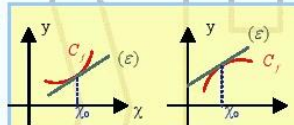
$$\pi > e \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow e \cdot \ln \pi < \pi \cdot \ln e \Leftrightarrow \ln \pi^e < \ln e^\pi \stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \pi^e < e^\pi$$

9 *) **Ειδική περίπτωση απόδειξης ανίσωσης με μία μεταβλητή**

Αν με έμμεσο ή άμεσο τρόπο γνωρίζεις πως στρέφει τα κοίλα σ' ένα διάστημα Δ μια συνάρτηση f , και ακόμα την εξίσωση της εφαπτόμενης $(\varepsilon): y = \alpha\chi + \beta$, της γραφικής της παράστασης C_f σ' ένα σημείο της $\chi_0 \in \Delta$ τότε θα έχεις :

$f(\chi) \geq \alpha\chi + \beta$ αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα Δ

$f(\chi) \leq \alpha\chi + \beta$ αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα Δ

9 **) **EXTRA (γενικός) τρόπος απόδειξης ανισώσεων** (με χρήση προηγούμενων γνώσεων)

α) Αν οι όροι της ζητούμενης ανίσωσης σου θυμίζουν το $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ (Διακρίνουσα τριωνόμου) τότε : θεώρησε το τριώνυμο $\alpha \cdot \omega^2 + \beta \cdot \omega + \gamma$, όπου ω αυθαίρετη (δική σου) μεταβλητή, και αν καταφέρεις να δείξεις ότι το παραπάνω τριώνυμο:

♠ έχει τουλάχιστο μία ρίζα τότε θα έχεις $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \dots$ (η ζητούμενη ανίσωση)

♠♠ διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε θα έχεις $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \dots$ (η ζητούμενη ανίσωση)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για δύο ρίζες θα έχεις: $\Delta > 0$ και για καμία ρίζα θα έχεις: $\Delta < 0$

β) Αν οι όροι της ζητούμενης ανίσωσης σου θυμίζουν προφανείς ανισώσεις όπως

$$(i): -1 \leq \frac{\alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \leq 1 \quad \begin{matrix} \vec{u} = (\alpha, \beta) \\ \vec{v} = (\kappa, \lambda) \end{matrix} \Leftrightarrow -1 \leq \cos(\widehat{u, v}) \leq 1$$

$$(ii): \left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \right| \leq \sqrt{(\alpha + \kappa)^2 + (\beta + \lambda)^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \quad \begin{matrix} z_1 = \alpha + \beta i \\ z_2 = \kappa + \lambda i \end{matrix} \Leftrightarrow \|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 \pm z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$$

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

- π.χ 1) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση: $f''(\chi) > 4(f'(\chi) - f(\chi))$ $\forall \chi \in \mathbb{R}$
- Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(\chi) = f(\chi) \cdot e^{-2\chi}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$
 - Δείξτε ότι είναι $f(\chi) \geq 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$

Λύση

i) Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως γινόμενο συνεχών, και παραγωγίσιμη με

$$g'(\chi) = (f(\chi) \cdot e^{-2\chi})' \Rightarrow g'(\chi) = f'(\chi) \cdot e^{-2\chi} - 2f(\chi) \cdot e^{-2\chi}, \chi \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g''(\chi) = (f'(\chi) \cdot e^{-2\chi} - 2f(\chi) \cdot e^{-2\chi})' \Rightarrow g''(\chi) = f''(\chi) \cdot e^{-2\chi} - 4f'(\chi) \cdot e^{-2\chi} + 4f(\chi) \cdot e^{-2\chi} \Leftrightarrow$$

$$g''(\chi) = [f''(\chi) - 4(f'(\chi) - f(\chi))] \cdot e^{-2\chi}, \chi \in \mathbb{R}$$

$$\text{Από υπόθεση έχω: } f''(\chi) > 4(f'(\chi) - f(\chi)) \Leftrightarrow f''(\chi) - 4(f'(\chi) - f(\chi)) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\chi} > 0$$

$$[f''(\chi) - 4(f'(\chi) - f(\chi))] \cdot e^{-2\chi} > 0 \Leftrightarrow g''(\chi) > 0, \chi \in \mathbb{R} \text{ Άρα η } g \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R}$$

ii)

ΣΚΕΨΗ

Ήδη έχω αποδείξει ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επειδή δεν έχω καμία εφαπτόμενη της γραφικής της παράστασης, θα προσπαθήσω από μόνος μου να βρω μια, σε κάποιο χαρακτηριστικό της σημείο. Ένα τέτοιο σημείο είναι το $(\chi_0, f(\chi_0)) = (\chi_0, 0)$, στο οποίο αναφέρεται η υπόθεση (ως ελάχιστο της συνάρτησης f)

Έχω ότι η f είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$ και ότι στο σημείο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0, άρα θα έχω: $f(\chi_0) = 0$ και $f'(\chi_0) = 0$

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_g δίνεται από τον τύπο: $y - g(\chi_0) = g'(\chi_0)(\chi - \chi_0)$ (1)

Έχω $g(\chi_0) = f(\chi_0) \cdot e^{-2\chi_0} = 0$ και $g'(\chi_0) = f'(\chi_0) \cdot e^{-2\chi_0} - 2f(\chi_0) \cdot e^{-2\chi_0} = 0$

οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχω ότι η εφαπτόμενη ευθεία της C_g στο σημείο χ_0 έχει εξίσωση (ε): $y = 0$

Επειδή η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ έχω ότι κάθε σημείο της C_g βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο σημείο της ευθείας (ε). Δηλαδή για δύο οποιαδήποτε σημεία των C_g και (ε)

με την ίδια τετμημένη χ θα ισχύει: $g(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow f(\chi) \cdot e^{-2\chi} \geq 0 \Leftrightarrow f(\chi) \geq 0$

Κοίτα στο αντίστοιχο σχήμα στην 9*

Π.Χ 2) Δείξτε ότι για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g, h ισχύει:

$$\left[(f \cdot g \cdot h)'(\chi) \right]^2 \leq \left[(f'(\chi))^2 + (g'(\chi))^2 + (h'(\chi))^2 \right] \cdot \left[(f \cdot g)^2(\chi) + (g \cdot h)^2(\chi) + (f \cdot h)^2(\chi) \right]$$

Λύση**ΣΚΕΨΗ**

Ζητώ να δείξω ότι $\left[(f \cdot g \cdot h)' \right]^2 \leq \left[(f')^2 + (g')^2 + (h')^2 \right] \left[(f \cdot g)^2 + (g \cdot h)^2 + (f \cdot h)^2 \right] \Leftrightarrow$

$\left[2(f \cdot g \cdot h)' \right]^2 \leq 4 \left[(f')^2 + (g')^2 + (h')^2 \right] \left[(f \cdot g)^2 + (g \cdot h)^2 + (f \cdot h)^2 \right]$, μου θυμίζει το

$\beta^2 - 4\alpha\gamma$ με $\beta = 2(f \cdot g \cdot h)'$, $\alpha = \left[(f')^2 + (g')^2 + (h')^2 \right]$, $\gamma = \left[(f \cdot g)^2 + (g \cdot h)^2 + (f \cdot h)^2 \right]$

Για τυχαίο $\omega \in \mathbb{R}$ θεωρώ το τριώνυμο:

$$\begin{aligned} & \left[(f'(\chi))^2 + (g'(\chi))^2 + (h'(\chi))^2 \right] \cdot \omega^2 + 2(f \cdot g \cdot h)'(\chi) \cdot \omega + \left[(f \cdot g)^2(\chi) + (g \cdot h)^2(\chi) + (f \cdot h)^2(\chi) \right] = \\ & \left[(f'(\chi))^2 + (g'(\chi))^2 + (h'(\chi))^2 \right] \cdot \omega^2 + 2[f'(\chi) \cdot g(\chi) \cdot h(\chi) + f(\chi)g'(\chi) \cdot h(\chi) + f(\chi) \cdot g(\chi) \cdot h'(\chi)] \cdot \omega + \\ & \quad \left[f^2(\chi) \cdot g^2(\chi) + g^2(\chi) \cdot h^2(\chi) + f^2(\chi) \cdot h^2(\chi) \right] = \\ & (f'(\chi) \cdot \omega)^2 + (g'(\chi) \cdot \omega)^2 + (h'(\chi) \cdot \omega)^2 + 2f'(\chi) \cdot g(\chi) \cdot h(\chi) \cdot \omega + 2f(\chi)g'(\chi) \cdot h(\chi) \cdot \omega + \\ & \quad 2f(\chi) \cdot g(\chi) \cdot h'(\chi) \cdot \omega + f^2(\chi) \cdot g^2(\chi) + g^2(\chi) \cdot h^2(\chi) + f^2(\chi) \cdot h^2(\chi) = \\ & (f'(\chi) \cdot \omega + g(\chi) \cdot h(\chi))^2 + (g'(\chi) \cdot \omega + f(\chi) \cdot h(\chi))^2 + (h'(\chi) \cdot \omega + f(\chi)g(\chi))^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Από την (1) είναι προφανές ότι το παραπάνω τριώνυμο δεν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές άρα θα ισχύει: $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \left[2(f \cdot g \cdot h)'(\chi) \right]^2 - 4 \left[(f'(\chi))^2 + (g'(\chi))^2 + (h'(\chi))^2 \right] \cdot \left[(f \cdot g)^2(\chi) + (g \cdot h)^2(\chi) + (f \cdot h)^2(\chi) \right] \leq 0 \\ & \Leftrightarrow \left[(f \cdot g \cdot h)'(\chi) \right]^2 \leq \left[(f'(\chi))^2 + (g'(\chi))^2 + (h'(\chi))^2 \right] \cdot \left[(f \cdot g)^2(\chi) + (g \cdot h)^2(\chi) + (f \cdot h)^2(\chi) \right] \end{aligned}$$

Π.χ 3) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f^2 + g^2)(\chi) = \chi^2 \cdot e^{2\chi}$ (1) Δείξτε ότι:

$$(i) \sqrt{(f-h)^2(\chi) + h^2(\chi)} - \sqrt{(g-h)^2(\chi) + h^2(\chi)} \leq |\chi| \cdot e^{\chi} \quad (ii) \frac{|\chi_1 \cdot \chi_2 + f(\chi_1) \cdot g(\chi_2)|}{\sqrt{\chi_1^2 + f^2(\chi_1)} \cdot \sqrt{\chi_2^2 + g^2(\chi_2)}} \leq 1$$

Λύση

(i) Θεωρώ τους μιγαδικούς: $z_1 = (f-h)(\chi) + i \cdot h(\chi)$ και $z_2 = h(\chi) + i \cdot (g-h)(\chi)$, $\chi \in \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με την τριγωνική ανίσωση θα έχω: $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| \Leftrightarrow$

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \Leftrightarrow \sqrt{(f-h)^2(\chi) + h^2(\chi)} - \sqrt{(g-h)^2(\chi) + h^2(\chi)} \leq \sqrt{f^2(\chi) + g^2(\chi)} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ \sqrt{(f-h)^2(\chi) + h^2(\chi)} - \sqrt{(g-h)^2(\chi) + h^2(\chi)} \leq \sqrt{\chi^2 \cdot e^{2\chi}} = |\chi| \cdot e^{\chi}$$

(ii) Θεωρώ τα διανύσματα $\vec{u} = (\chi_1, f(\chi_1))$ και $\vec{v} = (\chi_2, g(\chi_2))$

$$\text{Για τη γωνία τους } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ ισχύει } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\chi_1 \cdot \chi_2 + f(\chi_1) \cdot g(\chi_2)}{\sqrt{\chi_1^2 + f^2(\chi_1)} \cdot \sqrt{\chi_2^2 + g^2(\chi_2)}}$$

$$\text{Όμως: } |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|\chi_1 \cdot \chi_2 + f(\chi_1) \cdot g(\chi_2)|}{\sqrt{\chi_1^2 + f^2(\chi_1)} \cdot \sqrt{\chi_2^2 + g^2(\chi_2)}} \leq 1$$

10) Για ασκήσεις όπου μας δίνουν ότι μια ανίσωση ισχύει, $\forall \chi \in \Delta$ και ζητούν να αποδείξουμε κάτι άλλο (η σκέψη οδηγείται, κυρίως, στο ότι μας έχει δοθεί κάποιο ακρότατο.)

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ

- Φέρε όλους τους όρους της ανίσωσης στο 1^ο μέλος (οπότε θα έχεις: όροι ανίσωσης ≤ 0 (1) ή όροι ανίσωσης ≥ 0 (2))
- Θεώρησε τη συνάρτηση f που προκύπτει, όρισέ τη στο διάστημα Δ , και δικαιολόγησε ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με: $f'(\chi) = \text{βρές την παράγωγο}$ Θα έχεις: (1) $\Leftrightarrow f(\chi) \leq 0$ (1') ή (2) $\Leftrightarrow f(\chi) \geq 0$ (2')
- Ψάξε για προφανές χ_0 ώστε $f(\chi_0) = 0$ οπότε, αν έχεις την (1') θα γράφεις: $f(\chi) \leq f(\chi_0) \quad \forall \chi \in \Delta$, ενώ αν έχεις την (2') θα γράφεις: $f(\chi) \geq f(\chi_0) \quad \forall \chi \in \Delta$, άρα στο χ_0 έχεις μέγιστη τιμή (περ. (1')) ή ελάχιστη τιμή (περ. (2')) άρα από το θεώρημα FERMAT θα έχεις: $f'(\chi_0) = 0 \dots$ (κάνοντας σωστές πράξεις και ενέργειες καταλήγεις στο ζητούμενο).
- Αν δεν βρίσκεται προφανές χ_0 ώστε $f(\chi_0) = 0$ τότε βρές τη μονοτονία και τα ακρότατα της f και πές ότι και τα ακρότατά της πρέπει να ικανοποιούν την (1') (δηλ. $f(\chi_0) \leq 0$) ή την (2') (δηλ. $f(\chi_0) \geq 0$) και συνεχίζοντας θα φτάνεις στο ζητούμενο.

παράδειγμα (με σκόλια κατά τη λύση τους)

Π.χ 1) Δείξτε ότι αν για τον θετικό αριθμό $a \neq 1$ ισχύει: $\log_a \chi \leq \chi - 1 \quad \forall \chi \in (0, +\infty)$ τότε $a = e$

Λύση

Έχω ότι: $\forall \chi \in (0, +\infty)$ ισχύει: $\log_{\alpha} \chi \leq \chi - 1 \Leftrightarrow \log_{\alpha} \chi - \chi + 1 \leq 0$ (1)

Θεωρώ την συνάρτηση με τύπο: $f(\chi) = \log_{\alpha} \chi - \chi + 1$, $\chi \in (0, +\infty)$ έτσι η

$$(1) \Leftrightarrow f(\chi) \leq 0 \quad \forall \chi \in (0, +\infty) \quad (1')$$

Έχω ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη με $f'(\chi) = (\log_{\alpha} \chi - \chi + 1)' \Rightarrow$

$$f'(\chi) = \frac{1}{\chi \cdot \ln \alpha} - 1, \quad \chi \in (0, +\infty)$$

Παρατηρώ ότι $f(1) = \log_{\alpha} 1 - 1 + 1 = 0$ άρα $(1') \Leftrightarrow f(\chi) \leq f(1) \quad \forall \chi \in (0, +\infty)$ άρα η f στο $\chi_0 = 1$ παρουσιάζει μέγιστο, άρα από το θεώρημα FERMAT θα έχω:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 \cdot \ln \alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$$

Π x 2) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(\chi) - \eta\mu\chi \leq 2004(\chi + 1) \quad \forall \chi \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 2004$$

Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$

Λύση

Εφ' όσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έχω ότι υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο της $(\chi_0, f(\chi_0))$, άρα και στο σημείο στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 2004)$ και έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y - f(0) = f'(0) \cdot (\chi - 0) \Leftrightarrow y - 2004 = f'(0) \cdot \chi \Leftrightarrow y = f'(0) \cdot \chi + 2004$ (A)

Άρα αρκεί να υπολογίσω την $f'(0)$.

Έχω ότι $\forall \chi \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(\chi) - \eta\mu\chi \leq 2004(\chi + 1) \Leftrightarrow f(\chi) - \eta\mu\chi - 2004(\chi + 1) \leq 0$ (1)

Θεωρώ την συνάρτηση με τύπο: $G(\chi) = f(\chi) - \eta\mu\chi - 2004(\chi + 1)$, $\chi \in \mathbb{R}$ και έτσι

$(1) \Leftrightarrow G(\chi) \leq 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$ (1'). Ακόμα έχω ότι η G είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού ορίζεται από την παραγωγίσιμη (και άρα συνεχή) f και από τις συνεχείς συναρτήσεις: $\eta\mu\chi$ και $2004(\chi + 1)$,

και παρ/μη με: $G'(\chi) = (f(\chi) - \eta\mu\chi - 2004(\chi + 1))' \Rightarrow G'(\chi) = f'(\chi) - \sigma\upsilon\nu\chi - 2004$, $\chi \in \mathbb{R}$

Παρατηρώ ότι $G(0) = f(0) - \eta\mu 0 - 2004(0 + 1) \Leftrightarrow G(0) = 2004 - 2004 \Leftrightarrow G(0) = 0$ άρα

$(1') \Leftrightarrow G(\chi) \leq G(0) \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$ άρα η G στο $\chi_0 = 0$ παρουσιάζει μέγιστο, άρα από το θεώρημα FERMAT θα έχω:

$$G'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - \sigma\upsilon\nu 0 - 2004 = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 - 2004 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 2005$$
 (B)

Έτσι από (A) και (B) έχω ότι η ζητούμενη εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$ είναι η ευθεία με εξίσωση: $(\varepsilon): y = 2005 \cdot \chi + 2004$

Π.Χ. 3) Αν $\alpha, \beta > 0$ και για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^\chi + \beta^\chi \geq 2$, να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

Λύση

Έχω ότι: $\forall \chi \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha^\chi + \beta^\chi \geq 2 \Leftrightarrow \alpha^\chi + \beta^\chi - 2 \geq 0$ (1)

Θεωρώ την συνάρτηση: $f(\chi) = \alpha^\chi + \beta^\chi - 2$, $\chi \in \mathbb{R}$ έτσι η (1) $\Leftrightarrow f(\chi) \geq 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$ (1')

Έχω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με $f'(\chi) = (\alpha^\chi + \beta^\chi - 2)'$ $\Rightarrow$

$$f'(\chi) = \alpha^\chi \cdot \ln \alpha + \beta^\chi \cdot \ln \beta, \quad \chi \in \mathbb{R}$$

Παρατηρώ ότι $f(0) = \alpha^0 + \beta^0 - 2 \Leftrightarrow f(0) = 0$ άρα (1') $\Leftrightarrow f(\chi) \geq f(0) \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$ άρα η f

στο $\chi_0 = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο, άρα από το θεώρημα FERMAT θα έχω:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \cdot \ln \alpha + \beta^0 \cdot \ln \beta = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha + \ln \beta = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha \cdot \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 1 \text{ άρα οι αριθμοί}$$

α, β είναι αντίστροφοι.

Π.Χ. 4) Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του θετικού αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $e^\chi \geq \lambda \cdot \chi$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

Λύση

Θέλω να βρω τη μεγαλύτερη τιμή του θετικού αριθμού $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $e^\chi \geq \lambda \cdot \chi \Leftrightarrow e^\chi - \lambda \cdot \chi \geq 0$ (1)

Θεωρώ την συνάρτηση: $f(\chi) = e^\chi - \lambda \cdot \chi$, $\chi \in \mathbb{R}$ έτσι η (1) $\Leftrightarrow f(\chi) \geq 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$ (1')

Έχω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παρ/μη με $f'(\chi) = (e^\chi - \lambda \cdot \chi)'$ $\Rightarrow f'(\chi) = e^\chi - \lambda$, $\chi \in \mathbb{R}$

ΣΚΕΨΗ

Παρατηρώ ότι δεν μπορώ να βρω προφανές χ_0 ώστε $f(\chi_0) = 0$ και έτσι

θα βρω τη μονοτονία και τα ακρότατα της f σύμφωνα με την (10).

$$f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow e^\chi - \lambda = 0 \Leftrightarrow e^\chi = \lambda \Leftrightarrow \chi = \ln \lambda$$

$$f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow e^\chi - \lambda > 0 \Leftrightarrow e^\chi > \lambda \Leftrightarrow \overset{e^\chi \nearrow}{\chi} > \ln \lambda$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της f' , μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της f και τα ακρότατά της

χ	$-\infty$	$\ln \lambda$	$+\infty$
$f'(\chi)$	—	0	+
$f(\chi)$			

Άρα θα έχω:

$f \searrow$ για $\chi \in (-\infty, \ln \lambda]$ και

$f \nearrow$ για $\chi \in [\ln \lambda, +\infty)$ και

ότι η f παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) στο σημείο :

$$A(\ln \lambda, f(\ln \lambda))$$

Αφού η (1') ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ θα πρέπει να επαληθεύεται και από την τιμή $\lambda = \ln \lambda$ άρα

$$\text{θα έχω: } f(\ln \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\ln \lambda} - \lambda \cdot \ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda \cdot \ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot (1 - \ln \lambda) \geq 0 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} 1 \geq \ln \lambda \Leftrightarrow e \geq \lambda$$

άρα η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει ο θετικός αριθμός λ είναι: $\lambda = e$

- 11) Για ασκήσεις στις οποίες μας ζητούν να δείξουμε ότι μια ισότητα αληθεύει $\forall x \in \Delta$
(η σκέψη οδηγείται στο ότι μας ζητούν να δείξουμε πως μια συνάρτηση είναι σταθερή)
- ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ
- Φέρε όλους τους όρους της ζητούμενης ισότητας στο 1^ο μέλος
 - Θεώρησε τη συνάρτηση f που προκύπτει
 - Βρες την παράγωγο $f'(x)$ (σίγουρα θα βρεις $f'(x) = 0$ άρα θα έχεις $f(x) = c$ (1))
 - Υπολογίζεις το c βάζοντας στην (1) όπου x "κατάλληλο" αριθμό (σίγουρα θα έχεις $c = 0$)

Προφανώς αν σου ζητηθεί να δείξεις ότι μια συνάρτηση f είναι σταθερή, απλά υπολογίζεις την παράγωγό της η οποία θα ισούται με μηδέν ($f'(x) = 0$), άρα θα έχεις $f(x) = c$. Αν επιπλέον θέλεις να υπολογίσεις την τιμή της σταθεράς c θέτεις στον τύπο της f όπου x "κατάλληλη" τιμή

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3 \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$ είναι σταθερή και μετά να υπολογίσετε την τιμή της.

Λύση

Έχω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3 \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x)' \Rightarrow f'(x) = (\eta\mu^6 x)' + (\sigma\upsilon\nu^6 x)' + 3 \cdot (\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x)' \Rightarrow$$

$$f'(x) = 6\eta\mu^5 x \cdot (\eta\mu x)' + 6\sigma\upsilon\nu^5 x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' + 3 \cdot (\eta\mu^2 x)' \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + 3 \cdot \eta\mu^2 x \cdot (\sigma\upsilon\nu^2 x)' \Rightarrow$$

$$f'(x) = 6\eta\mu^5 x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 6\sigma\upsilon\nu^5 x \cdot \eta\mu x + 6 \cdot \eta\mu x \cdot (\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + 6 \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' \Rightarrow$$

$$f'(x) = 6\eta\mu^5 x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 6\sigma\upsilon\nu^5 x \cdot \eta\mu x + 6 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x - 6 \cdot \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$$

$$f'(x) = 6\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu^2 x - 1) - 6\sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu^2 x - 1) \Rightarrow$$

$$f'(x) = 6\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (-\sigma\upsilon\nu^2 x) - 6\sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x \cdot (-\eta\mu^2 x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = -6\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x + 6\sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu^3 x \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \text{άρα}$$

$$f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3 \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = c \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Αφού η (1) αληθεύει $\forall x \in \mathbb{R}$ μπορώ να θέσω $x = 0$

οπότε έχω: $\eta \mu^6 0 + \sigma \nu^6 0 + 3 \cdot \eta \mu^2 0 \cdot \sigma \nu^2 0 = c \Rightarrow c = 1$ Άρα $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Π.χ. 2) (i) Δείξτε ότι για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = f(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) = c \cdot e^x$
 (ii) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ με $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ (1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$, να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Λύση

Υπενθύμιση: Θυμήσου πως βρίσκουμε την αρχική μιας f σύμφωνα με την 6) περίπτωση

(i) Έχω: $f'(x) = f(x) \Rightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = 0 \Rightarrow$

$$e^{-x} \cdot f'(x) + (e^{-x})' \cdot f(x) = 0 \Rightarrow (e^{-x} \cdot f(x))' = 0 \Rightarrow e^{-x} \cdot f(x) = c \Rightarrow f(x) = \frac{c}{e^{-x}} \Rightarrow$$

$$f(x) = c \cdot e^x, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Αντιστρόφως: αν $f(x) = c \cdot e^x$ τότε $f'(x) = (c \cdot e^x)' \Rightarrow f'(x) = c \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = f(x)$

(ii)

Υπενθύμιση: Θυμήσου από τις περιπτώσεις ορίων πως όταν δίνεται συναρτησιακή σχέση δύο μεταβλητών x, y της μορφής $f(x+y)$ τότε αντί για $x \rightarrow x_0$ θέτω $x = x_0 + h$ και ζητώ το όριο για $h \rightarrow 0$

Θέλω να δείξω ότι $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και ότι είναι πραγματικός αριθμός

$$\begin{aligned} \text{Έχω: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \cdot f(h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \cdot (f(h) - 1)}{h} = \\ &f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(h) - 1)}{h} \quad (2) \end{aligned}$$

Υπενθύμιση

Θυμήσου από τις περιπτώσεις ορίων πως όταν θέλω να υπολογίσω ένα όριο στο οποίο υπάρχει άγνωστη συνάρτηση, (εδώ η $f(h)$), εκμεταλλεύομαι κάθε άλλο έμμεσα ή άμεσα δοσμένο όριο που έχω με την f (εδώ έχω $f'(0) = 1$)

$$\text{Έχω } f'(0) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \quad (3)$$

Χρειάζομαι το $f'(0)$ θα το υπολογίσω από την (1)

Από (1) θέτοντας όπου $x = y = 0$ έχω: $f(0+0) = f(0) \cdot f(0) \Leftrightarrow f(0) = f^2(0) \Leftrightarrow$

$$f(0) - f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot (1 - f(0)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \text{ αδύνατο αφού από υπόθεση } f(x) \in \mathbb{R}_+^* \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Έτσι από (3) και (4) έχω $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$

άρα από (2) $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f(x_0) \cdot 1 \Rightarrow f'(x_0) = f(x_0)$ για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ οπότε από (i) θα έχω ότι

$$f(x) = c \cdot e^x \quad (4), \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Για να βρω τη σταθερά c θέτω στην (4) όπου $x = 0$ και έχω $f(0) = c \cdot e^0 \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} 1 = c$

$$\text{Άρα } f(x) = e^x$$

Π.χ. 3) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Αρκεί να δείξω ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Υπενθύμιση

Θυμήσου πως βρίσκουμε την παράγωγο μιας f , σύμφωνα με την 1) γενική συμβολή

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ θα προσπαθήσω να βρω το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Θυμήσου από τις συμβουλές στα όρια, πώς υπολογίζουμε ένα όριο, όταν μας δίνεται μια ανίσωση

Έχω ότι $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 \stackrel{|x-y| > 0}{\Leftrightarrow} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |x - y| \quad (1)$$

θέτοντας στην (1) όπου $y = x_0$ έχω

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0| \quad (2)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (|x - x_0|) = 0$ άρα από (2) σύμφωνα με το κριτήριο

παρεμβολής θα έχω $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, άρα $f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$,

άρα $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Π.Χ. 4) Δείξτε ότι $\forall \chi \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu^2 \chi + \sigma\nu\nu^2 \chi = 1$

Λύση

Θεωρώ τη συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \eta\mu^2 \chi + \sigma\nu\nu^2 \chi - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με $f'(\chi) = (\eta\mu^2 \chi + \sigma\nu\nu^2 \chi - 1)' \Rightarrow f'(\chi) = 2\eta\mu\chi \cdot (\eta\mu\chi)' + 2\sigma\nu\nu\chi \cdot (\sigma\nu\nu\chi)' \Rightarrow f'(\chi) = 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\nu\nu\chi - 2\sigma\nu\nu\chi \cdot \eta\mu\chi \Rightarrow f'(\chi) = 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$, άρα $f(\chi) = c \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$, άρα $\eta\mu^2 \chi + \sigma\nu\nu^2 \chi - 1 = c \quad (1) \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$.

Για να βρω τη σταθερά c θέτω στην (1) όπου $\chi = 0$ και έχω $\eta\mu^2 0 + \sigma\nu\nu^2 0 - 1 = c \Leftrightarrow 0 = c$
Άρα $\eta\mu^2 \chi + \sigma\nu\nu^2 \chi - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 \chi + \sigma\nu\nu^2 \chi = 1 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$

Π.Χ. 5) Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ για τις οποίες ισχύει: $f'(\chi) = f(\chi) \cdot \ln g(\chi)$ και $g'(\chi) = -g(\chi) \cdot \ln f(\chi) \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση G με τύπο: $G(\chi) = (\ln f(\chi) - \eta\mu\chi)^2 + (\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi)^2$ είναι σταθερή. Αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 1$ και $g(0) = e$ να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f και g

Λύση

Από υπόθεση έχω ότι $f(\chi) > 0$ και $g(\chi) > 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$, άρα οι συναρτήσεις $\ln f(\chi)$ και $\ln g(\chi)$ ορίζονται $\forall \chi \in \mathbb{R}$ και επειδή και οι συναρτήσεις $\eta\mu\chi$ και $\sigma\nu\nu\chi$ ορίζονται $\forall \chi \in \mathbb{R}$ θα έχω ότι το πεδίο ορισμού της G είναι το $\mathbb{R}$.

Ακόμα επειδή οι συναρτήσεις από τις οποίες ορίζεται η G είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες έχω ότι και η G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} G'(\chi) &= \left((\ln f(\chi) - \eta\mu\chi)^2 + (\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi)^2 \right)' \Rightarrow \\ G'(\chi) &= 2(\ln f(\chi) - \eta\mu\chi) \cdot (\ln f(\chi) - \eta\mu\chi)' + 2(\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi) \cdot (\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi)' \Rightarrow \\ G'(\chi) &= 2(\ln f(\chi) - \eta\mu\chi) \cdot \left(\frac{f'(\chi)}{f(\chi)} - \sigma\nu\nu\chi \right) + 2(\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi) \cdot \left(\frac{g'(\chi)}{g(\chi)} + \eta\mu\chi \right) \quad \text{υπόθεση} \Leftrightarrow \\ G'(\chi) &= 2(\ln f(\chi) - \eta\mu\chi) \cdot (\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi) + 2(\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi) \cdot (-\ln f(\chi) + \eta\mu\chi) \Leftrightarrow \\ G'(\chi) &= 2(\ln f(\chi) - \eta\mu\chi) \cdot (\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi) - 2(\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi) \cdot (\ln f(\chi) - \eta\mu\chi) \Leftrightarrow \\ G'(\chi) &= 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Άρα $G(\chi) = c \Leftrightarrow (\ln f(\chi) - \eta\mu\chi)^2 + (\ln g(\chi) - \sigma\nu\nu\chi)^2 = c \quad (1) \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$

Θέτοντας στην (1) όπου $\chi = 0$ έχω $(\ln f(0) - \eta\mu 0)^2 + (\ln g(0) - \sigma\nu\nu 0)^2 = c \quad \text{υπόθεση} \Leftrightarrow$
 $(\ln 1 - 0)^2 + (\ln e - 1)^2 = c \Leftrightarrow 0 = c$. Άρα (1) $\Leftrightarrow$

$$(\ln f(x) - \eta\mu x)^2 + (\ln g(x) - \sigma\nu x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln f(x) - \eta\mu x = 0 \\ \ln g(x) - \sigma\nu x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \ln f(x) = \eta\mu x \\ \ln g(x) = \sigma\nu x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = e^{\eta\mu x}, & x \in \mathbb{R} \\ g(x) = e^{\sigma\nu x}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

12) Πότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle

(α) “προφανώς” Όταν μας ζητηθεί να εφαρμοστεί σε κάποια συνάρτηση f

(β) Όταν (με έμμεσο συνήθως τρόπο) ζητηθεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο x_0 ώστε

$$f'(x_0) = 0 \text{ για κάποια συνάρτηση } f$$

(γ) Αν η εκφώνηση μιας άσκησης μας προιδεάζει για την εφαρμογή του θεωρήματος Rolle, δηλ. αν “δένουν” με τις παρακάτω συνθήκες: (κάποιες απ’ αυτές ή και όλες)

(i) f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

(ii) f παραγωγίσιμη στο (α, β)

(iii) $f(\alpha) = f(\beta)$

(δ) Όταν μας πουν για το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης (έχει ήδη εξεταστεί στην περίπτωση (8))

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Πχ 1) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[0, 2]$ για τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \delta x^3 - \alpha x - \beta + 1, & x \leq 1 \\ \frac{2x^3 - 5x + \gamma}{x-1}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{και μετά να υπολογίσετε το } \xi \in (0, 2) \text{ για το οποίο ισχύει } f'(\xi) = 0$$

Λύση

Για να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 2]$

θα πρέπει να επαληθεύονται οι συνθήκες: (i) f συνεχής στο $[0, 2]$

(ii) f παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και

(iii) $f(0) = f(2)$

Για $\chi \in [0,1)$ έχω $f(\chi) = \delta\chi^2 - \alpha\chi - \beta + 1$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική

Για $\chi \in (1,2]$ έχω $f(\chi) = \frac{2\chi^3 - 5\chi + \gamma}{\chi - 1}$ και είναι συνεχής ως ρητή.

Θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $\chi_0 = 1$

$$\text{άρα θα πρέπει να ισχύει: } \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = f(1) \quad (1)$$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\delta\chi^2 - \alpha\chi - \beta + 1) = \delta - \alpha - \beta + 1 \quad (\text{A})$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{2\chi^3 - 5\chi + \gamma}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (2\chi^3 - 5\chi + \gamma) \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{1}{\chi - 1} = (-3 + \gamma) \cdot (+\infty) \quad (\text{B})$$

Αν $-3 + \gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma > 3$ τότε από (B) έχω $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = +\infty$ οπότε η f δεν θα είναι

συνεχής στο $\chi_0 = 1$ και άρα δεν θα εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle

Αν $-3 + \gamma < 0 \Leftrightarrow \gamma < 3$ τότε από (B) έχω $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = -\infty$ οπότε η f δεν θα είναι

συνεχής στο $\chi_0 = 1$ και άρα και πάλι δεν θα εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle

Αν $\gamma = 3$ τότε θα έχω

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{2\chi^3 - 5\chi + 3}{\chi - 1} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{(\chi - 1) \cdot (2\chi^2 + 2\chi - 3)}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (2\chi^2 + 2\chi - 3) = 1 \quad (\text{B}')$$

$$f(1) = \delta - \alpha - \beta + 1 \quad (\text{Γ})$$

Από (1) και (A), (B'), (Γ) έχω ότι για να είναι συνεχής η f και στο $\chi_0 = 1$, και άρα στο

διάστημα $[0,2]$ θα πρέπει να ισχύουν:
$$\begin{cases} \gamma = 3 & (\alpha) \quad \text{και} \\ \delta - \alpha - \beta + 1 = 1 \Leftrightarrow \beta = \delta - \alpha & (\beta) \end{cases}$$

$$\text{Από } (\alpha) \text{ και } (\beta) \text{ η συνάρτηση γράφεται: } f(\chi) = \begin{cases} \delta\chi^2 - \alpha\chi - \delta + \alpha + 1, & \chi \leq 1 \\ \frac{2\chi^3 - 5\chi + 3}{\chi - 1}, & \chi > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(\chi) = \begin{cases} \delta\chi^2 - \alpha\chi - \delta + \alpha + 1, & \chi \leq 1 \\ 2\chi^2 + 2\chi - 3, & \chi > 1 \end{cases}$$

Για $\chi \in (0,1)$ έχω $f(\chi) = \delta\chi^2 - \alpha\chi - \delta + \alpha + 1$ άρα είναι παρ/μη με $f'(\chi) = 2\delta\chi - \alpha$

Για $\chi \in (1,2)$ έχω $f(\chi) = 2\chi^2 + 2\chi - 3$ άρα είναι παρ/μη με $f'(\chi) = 4\chi + 2$

Πρέπει να είναι παρ/μη και στο $\chi_0 = 1$ άρα θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \in \mathbb{R} \quad (2) \quad \text{Έχω}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\delta x^2 - \alpha x - \delta + \alpha + 1) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\delta x^2 - \alpha x - \delta + \alpha}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1) \cdot (\delta x + \delta - \alpha)}{x - 1} = 2\delta - \alpha \quad (\Pi_1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x^2 + 2x - 3) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot (2x+4)}{x - 1} = 6 \quad (\Pi_2)$$

Από (2), (Π_1) , (Π_2) έχω ότι η f είναι παρ/μη στο $x_0 = 1$ και άρα στο $(0, 2)$ όταν
 $2\delta - \alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 2\delta - 6 \quad (\gamma)$

$$\text{Έτσι έχω } f(x) = \begin{cases} \delta x^2 - (2\delta - 6)x + \delta - 5, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

Ακόμα για να εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle πρέπει να είναι

$$f(0) = f(2) \Leftrightarrow \delta - 5 = 9 \Leftrightarrow \delta = 14 \quad (\delta)$$

Από (α), (β), (γ) και (δ) έχω ότι $\alpha = 22$, $\beta = -8$, $\gamma = 3$ και $\delta = 14$ και ότι η συνάρτηση

$$\text{έχει τύπο } f(x) = \begin{cases} 14x^2 - 22x + 9, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι η παραπάνω συνάρτηση ικανοποιεί και τις τρεις συνθήκες του Θεωρήματος Rolle δηλ. : (i) είναι συνεχής στο $[0, 2]$

$$(ii) \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, 2) \text{ με } f'(x) = \begin{cases} 28x - 22, & x \leq 1 \\ 4x + 2, & x > 1 \end{cases} \quad \text{και}$$

$$(iii) f(0) = f(2)$$

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi \in (0, 2) \text{ για το οποίο ισχύει } f'(\xi) = 0 \begin{cases} \xrightarrow{\xi \in (0, 1]} 28\xi = 22 \Leftrightarrow \xi = \frac{11}{14} \text{ δεκτό} \\ \xrightarrow{\xi \in (1, 2)} 4\xi + 2 = 0 \Leftrightarrow \xi = -\frac{1}{2} \text{ απορ.} \end{cases}$$

$$\text{Άρα το ζητούμενο } \xi \in (0, 2) \text{ είναι το } \xi = \frac{11}{14}$$

Π.χ. 2) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και με $f(\alpha) = f(\beta)$. Δείξτε ότι η f έχει ένα τουλάχιστο κρίσιμο σημείο στο (α, β)

Λύση

ΣΚΕΨΗ

Κρίσιμα σημεία: τα εσωτερικά x_0 στα οποία δεν υπάρχει η $f'(x_0)$ ή αν υπάρχει θα είναι $f'(x_0) = 0$

Παρατηρώ ότι δεν αναφέρεται στην εκφώνηση τίποτα για την παραγωγισιμότητα της f

- Αν υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο δεν είναι παραγωγίσιμη η f τότε αυτό το σημείο είναι κρίσιμο σημείο (1)
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$, επειδή επιπλέον από υπόθεση είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$ έχω ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle άρα θα υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\chi_0) = 0$ (2)

Από (1) και (2) έχω ότι η f έχει ένα τουλάχιστο κρίσιμο σημείο στο (α, β)

Π.Χ. 3) Δίνεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Αν υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\alpha) = f(\xi) = f(\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\chi_0) = 0$

Λύση

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ έχω ότι είναι και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, άρα και σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \xi]$ και $[\xi, \beta]$

Ακόμα έχω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα (α, ξ) και (ξ, β) και ότι $f(\alpha) = f(\xi) = f(\beta)$. Άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \xi]$ και $[\xi, \beta]$ άρα υπάρχουν $\chi_1 \in (\alpha, \xi)$ και $\chi_2 \in (\xi, \beta)$ ώστε

$$f'(\chi_1) = f'(\chi_2) = 0 \text{ (προφανώς είναι } \chi_1 < \chi_2 \text{)}$$

Παρατηρώ τώρα ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\chi_1, \chi_2]$

άρα υπάρχει $\chi_0 \in (\chi_1, \chi_2)$ ώστε $f''(\chi_0) = 0$ και επειδή $\alpha < \chi_1 < \chi_0 < \chi_2 < \beta$ έχω $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$

Π.Χ. 4) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, β) και με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Δείξτε ότι $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$

Λύση

ΣΚΕΨΗ

Η εκφώνηση με προϋποθέτει για εφαρμογή του Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ σε κατάλληλη συνάρτηση g τέτοια ώστε η ισότητα $g'(\xi) = 0$ να δίνει την $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$. Άρα η g θα ταυριάζει με κάποια αρχική της $f'(\chi) + \lambda f(\chi) \leftrightarrow e^{\lambda \chi} \cdot f'(\chi) + \lambda e^{\lambda \chi} \cdot f(\chi) \leftrightarrow (e^{\lambda \chi} \cdot f(\chi))'$ κοίτα (6ββ)

Για το τυχαίο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρώ τη συνάρτηση $g(\chi) = e^{\lambda \chi} \cdot f(\chi)$ η οποία

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών,

παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(\chi) = (e^{\lambda \chi} \cdot f(\chi))' = \lambda e^{\lambda \chi} \cdot f(\chi) + e^{\lambda \chi} \cdot f'(\chi)$ (1)

$$\text{και έχω } \left. \begin{aligned} g(\alpha) &= e^{\lambda\alpha} \cdot f(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=0}{=} e^{\lambda\alpha} \cdot 0 = 0 \\ g(\beta) &= e^{\lambda\beta} \cdot f(\beta) \stackrel{f(\beta)=0}{=} e^{\lambda\beta} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \right\} g(\alpha) = g(\beta)$$

Άρα εφαρμόζεται για τη g το Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$g'(\xi) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \lambda e^{\lambda\xi} \cdot f(\xi) + e^{\lambda\xi} \cdot f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda\xi} \cdot (\lambda f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \stackrel{e^{\lambda\xi} \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$$

Π.Χ. 5) Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:
Είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και $f(\alpha) \cdot g(\beta) = f(\beta) \cdot g(\alpha)$
Αν επιπλέον ισχύει $g(\chi) \neq 0 \quad \forall \chi \in [\alpha, \beta]$ και $g'(\chi) \neq 0 \quad \forall \chi \in (\alpha, \beta)$ δείξτε ότι
(i) για την συνάρτηση $h(\chi) = \frac{f(\chi)}{g(\chi)}$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$
(ii) υπάρχει τουλάχιστο ένα $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $h(\chi_0) = \frac{f'(\chi_0)}{g'(\chi_0)}$

Λύση

(i) Επειδή $g(\chi) \neq 0 \quad \forall \chi \in [\alpha, \beta]$ έχω ότι η h ορίζεται $\forall \chi \in [\alpha, \beta]$, είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

(ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων f και g) και παραγωγίσιμη στο (α, β) (ως πηλίκο

των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και g) με $h'(\chi) = \left(\frac{f(\chi)}{g(\chi)} \right)' = \frac{f'(\chi) \cdot g(\chi) - f(\chi) \cdot g'(\chi)}{g^2(\chi)}$

$$\text{Ακόμα έχω } f(\alpha) \cdot g(\beta) = f(\beta) \cdot g(\alpha) \stackrel{g(\chi) \neq 0 \quad \forall \chi \in [\alpha, \beta]}{\Leftrightarrow} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \Leftrightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Άρα η h ικανοποιεί τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$

(ii) Από (i) έχω ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$ για την h ,

$$\text{άρα υπάρχει } \chi_0 \in (\alpha, \beta) \text{ ώστε } h'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\chi_0) \cdot g(\chi_0) - f(\chi_0) \cdot g'(\chi_0)}{g^2(\chi_0)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi_0) \cdot g(\chi_0) - f(\chi_0) \cdot g'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow f'(\chi_0) \cdot g(\chi_0) = f(\chi_0) \cdot g'(\chi_0) \stackrel{g'(\chi) \neq 0 \quad \forall \chi \in (\alpha, \beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f(\chi_0)}{g(\chi_0)} = \frac{f'(\chi_0)}{g'(\chi_0)} \Leftrightarrow h(\chi_0) = \frac{f'(\chi_0)}{g'(\chi_0)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν μας ζητηθεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο χ_0 που ικανοποιεί κάποια ιδιότητα, ενώ από προηγούμενο ερώτημα έχουμε δείξει ότι εφαρμόζεται ένα από τα θεωρήματα Rolle – Bolzano – Θ.Μ.Τ., τότε είναι πολύ πιθανό, το ζητούμενο χ_0 , να είναι το χ_0 του θεωρήματος Rolle – Bolzano ή Θ.Μ.Τ. που δείξαμε προηγουμένως.

Π.Χ. 6) Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι

- (i) για την συνάρτηση h με τύπο $h(x) = \frac{f(x)}{x - \gamma}$, με $\gamma \notin [\alpha, \beta]$ εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$
 (ii) υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\chi_0, f(\chi_0))$ να διέρχεται από το σημείο $N(\gamma, 0)$

Λύση

(i) Επειδή $\gamma \notin [\alpha, \beta]$ έχω $x - \gamma \neq 0$ άρα η h ορίζεται $\forall x \in [\alpha, \beta]$,

είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$h'(x) = \left(\frac{f(x)}{x - \gamma} \right)' = \frac{f'(x) \cdot (x - \gamma) - f(x)}{(x - \gamma)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ακόμα έχω} \quad h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha - \gamma} = 0 \\ h(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta - \gamma} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Άρα εφαρμόζεται για την h το Θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$

(ii) Από (i) έχω ότι υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$h'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\chi_0) \cdot (\chi_0 - \gamma) - f(\chi_0)}{(\chi_0 - \gamma)^2} = 0 \Leftrightarrow f(\chi_0) = f'(\chi_0) \cdot (\chi_0 - \gamma) \quad (1)$$

Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (α, β) έχω ότι ορίζεται η εφαπτόμενη της C_f στο $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ και έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - f(\chi_0) = f'(\chi_0) \cdot (x - \chi_0) \quad (2)$$

Θα ελέγξω αν η (ε) διέρχεται από το σημείο $N(\gamma, 0)$

Για να γίνεται αυτό αρκεί οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την (ε)

Θέτοντας στην (2) όπου $x = \gamma$, $y = 0$ έχω :

$$0 - f(\chi_0) = f'(\chi_0) \cdot (\gamma - \chi_0) \Leftrightarrow f(\chi_0) = f'(\chi_0) \cdot (\chi_0 - \gamma) \text{ που αληθεύει λόγω της } (1)$$

Τελικά έχω ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\chi_0, f(\chi_0))$ να διέρχεται από το σημείο $N(\gamma, 0)$

Π.Χ. 7) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και για τις οποίες ακόμα ισχύει :

$$f(\alpha) \cdot g(\beta) = f(\beta) \cdot g(\alpha) \quad (1) \text{ και } f'(x) \cdot g(x) \neq f(x) \cdot g'(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $[\alpha, \beta]$

Λύση

ΣΚΕΨΗ
ΣΧΟΛΙΟ

Προσπαθώντας να δείξω ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστο μια ρίζα με τη μέθοδο 81) φτάνω σε αδιέξοδο, γι' αυτό θα στηριχτώ στο ότι η εκφώνηση μου θυμίζει το Θ. Rolle

ΣΚΕΨΗ

Αν ήταν $f(\chi) \neq 0$, η $f(\alpha) \cdot g(\beta) = f(\beta) \cdot g(\alpha)$ ισοδύναμα θα γραφόταν $\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{g(\beta)}{f(\beta)}$ και τα υπόλοιπα δεδομένα με προϋδεάζουν να εφαρμόσω το Θ. Rolle στην $h(\chi) = \frac{g(\chi)}{f(\chi)}$

Έστω ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ είναι αδύνατη στο $[\alpha, \beta]$ δηλ. έστω ότι είναι

$f(\chi) \neq 0 \quad \forall \chi \in [\alpha, \beta]$ Τότε ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$ η συνάρτηση με τύπο $h(\chi) = \frac{g(\chi)}{f(\chi)}$,

η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών, και παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και g με

$$h'(\chi) = \left(\frac{g(\chi)}{f(\chi)} \right)' = \frac{g'(\chi) \cdot f(\chi) - f'(\chi) \cdot g(\chi)}{f^2(\chi)} \text{ και ακόμα είναι } h(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} \stackrel{(*)}{=} \frac{g(\beta)}{f(\beta)} = h(\beta)$$

Άρα εφαρμόζεται το Θ. Rolle, άρα

$$\text{υπάρχει } \chi_0 \in (\alpha, \beta) \text{ ώστε } h'(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{g'(\chi_0) \cdot f(\chi_0) - f'(\chi_0) \cdot g(\chi_0)}{f^2(\chi_0)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$g'(\chi_0) \cdot f(\chi_0) - f'(\chi_0) \cdot g(\chi_0) = 0 \Leftrightarrow g'(\chi_0) \cdot f(\chi_0) = f'(\chi_0) \cdot g(\chi_0)$$

Ατοπο αφού από υπόθεση ισχύει $f'(\chi) \cdot g(\chi) \neq f(\chi) \cdot g'(\chi) \quad \forall \chi \in (\alpha, \beta)$

Άρα δεν μπορεί να ορίζεται η $h(\chi) = \frac{g(\chi)}{f(\chi)}$ στο $[\alpha, \beta]$, άρα η $f(\chi)$, που βρίσκεται

στον παρονομαστή, κάπου θα μηδενίζεται. Άρα υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(\xi) = 0$ Δηλ. η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

13) Πότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής

(α) "προφανώς" Όταν μας ζητηθεί να εφαρμοστεί σε κάποια συνάρτηση f

(β) Όταν (με έμμεσο συνήθως τρόπο) ζητηθεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποιο x_0 ώστε να ισχύει μια ισότητα με $f'(x_0)$ (κυρίως αν συνυπάρχουν στην ισότητα $f'(x_1), f'(x_2), \dots$)

(γ) Αν τα δεδομένα μιας άσκησης τις προϋδεάζει για την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ., δηλ. αν "δένουν" με (κάποια από) τις παρακάτω συνθήκες:

(i) f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, (ii) f παραγωγίσιμη στο (α, β) , (iii) έμμεσα ή άμεσα (1): έχεις τις τιμές $f(\alpha), f(\beta)$ ή (2): παρουσιάζεται η διαφορά $f(\beta) - f(\alpha)$

(δ) Όταν μας ζητήσουν να αποδείξουμε μια ανίσωση (έχει ήδη εξεταστεί τις περιπτώσεις (9.1,2,3))

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τις)

Π.Χ. 1) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-1, 1]$. Μετά για όποια από τις παρακάτω συναρτήσεις εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής να βρείτε το $\xi \in (-1, 1)$ του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

$$(i) f_1(\chi) = \begin{cases} 2\chi^2 + \chi, & \chi \leq 0 \\ \chi^3 + \chi, & \chi > 0 \end{cases} \quad (ii) f_2(\chi) = |\chi^2 - \chi| \quad (iii) f_3(\chi) = \begin{cases} 3 + \chi^3, & |\chi| \neq 1 \\ 2, & |\chi| = 1 \end{cases}$$

Λύση

(i) Για $x \in [-1, 0)$ έχω $f_1(x) = 2x^2 + x$ και είναι συνεχής ως πολωνυμική. (A)

Για $x \in (0, 1]$ έχω $f_1(x) = x^3 + x$ που επίσης είναι συνεχής ως πολωνυμική. (B)

Θα ελέγξω τη συνέχεια στο $x_0 = 0$

Έχω $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 + x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + x) = 0$ Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$

Ακόμα $f_1(0) = 0$ άρα έχω $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0 = f_1(0)$.

Άρα η f_1 είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ (Γ)

Από (A), (B), (Γ) έχω ότι η f_1 είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ (1)

Για $x \in (-1, 0)$ έχω ότι η f_1 είναι παρ/μη με $f_1'(x) = (2x^2 + x)' = 4x + 1$. (A')

Για $x \in (0, 1)$ έχω ότι η f_1 είναι παρ/μη με $f_1'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$. (B')

Θα ελέγξω την παραγωγισιμότητα στο $x_0 = 0$

Έχω $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot (2x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 1$ και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot (x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = 1$ Άρα $f_1'(0) = 1$ (Γ')

Από (A'), (B'), (Γ') έχω ότι η f_1 είναι παρ/μη στο $(-1, 1)$ με

$$f_1'(x) = \begin{cases} 4x + 1, & x \leq 0 \\ 3x^2 + 1, & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχω ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f_1 άρα

υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f_1'(\xi) = \frac{f_1(1) - f_1(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$ (ε)

Αν $\xi \in (-1, 0]$ (ε) $\Leftrightarrow 4\xi + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi = -\frac{1}{8}$ δεκτό

Αν $\xi \in (0, 1)$ (ε) $\Leftrightarrow 3\xi^2 + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\xi^2 = -\frac{1}{2}$ αδύνατο

Άρα το ζητούμενο $\xi \in (-1, 1)$ του Θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι το $\xi = -\frac{3}{8}$ και η

γεωμετρική ερμηνεία είναι ότι η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M\left(-\frac{3}{8}, f\left(-\frac{3}{8}\right)\right)$

είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα AB όπου $A(-1, f(-1))$ και $B(1, f(1))$

(ii) Έχω ότι η $x^2 - x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική, άρα και η $|x^2 - x| = f_2(x)$ είναι επίσης συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-1, 1]$.

Θα ελέγξω αν είναι παρ/μη στο $(-1, 1)$

Έχω $f_2(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ x - x^2, & x \in (0, 1) \end{cases}$

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ έχω $f_2'(x) = (x^2 - x)' = 2x - 1$

Για $x \in (0, 1)$ έχω $f_2'(x) = (x - x^2)' = 1 - 2x$

Θα ελέγξω αν είναι παρ/μη στο $\chi_0 = 0$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{f_2(\chi) - f_2(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\chi^2 - \chi - 0}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\chi \cdot (\chi - 1)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} (\chi - 1) = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{f_2(\chi) - f_2(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\chi - \chi^2 - 0}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\chi \cdot (1 - \chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} (1 - \chi) = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{f_1(\chi) - f_1(0)}{\chi - 0} \neq \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{f_1(\chi) - f_1(0)}{\chi - 0}$$

Άρα η f_2 δεν είναι παρ/μη στο $\chi_0 = 0$ και συνεπώς δεν είναι παρ/μη σ' όλο το $(-1, 1)$

Άρα δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f_2 στο $[-1, 1]$

$$(iii) \text{ Έχω } f_3(\chi) = \begin{cases} 3 + \chi^3, & \chi \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) \\ 2, & \chi = -1 \text{ ή } \chi = 1 \end{cases}$$

για $\chi \in (-1, 1)$ έχω $f_3(\chi) = 3 - \chi^2$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική

Θα ελέγξω αν είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $[-1, 1]$

$$\text{Θα πρέπει να ισχύουν } \lim_{\chi \rightarrow -1^+} f_3(\chi) = f_3(-1) \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f_3(\chi) = f_3(1)$$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -1^+} f_3(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1^+} (3 + \chi^3) = 2 = f_3(-1) \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f_3(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^-} (3 + \chi^3) = 4 \neq 2 = f_3(1)$$

Άρα η f_3 δεν είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $[-1, 1]$ (είναι συνεχής στο $[-1, 1)$)

Άρα δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f_3 στο $[-1, 1]$

Π.χ. 2) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παρ/μη στο (α, β) . Δείξτε ότι υπάρχουν $\chi_1, \chi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει: $f'(\chi_1) + f'(\chi_2) = 2 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Λύση

Υπενθύμιση

Αν θέλεις να δείξεις ότι υπάρχουν -2- χαρακτηριστικά σημεία χ_1, χ_2 σ' ένα διάστημα (α, β) που επαληθεύουν μια ισότητα, χωρίζεις το (α, β) σε -2- υποδιαστήματα $(\alpha, \gamma), (\gamma, \beta)$ όπου $\gamma = \text{χαρακτηριστική τιμή που έχεις από προηγούμενο ερώτημα (ή άμεση συνέπεια των δεδομένων)}$ ή

$\gamma = 0$ αν $\alpha < 0 < \beta$ ή

$\gamma = \frac{\kappa\alpha + \lambda\beta}{\kappa + \lambda}$, όπου $\kappa, \lambda > 0$, συντελεστές των παραστάσεων $\Pi(\chi_2), \Pi(\chi_1)$ στις οποίες υπάρχουν τα χ_1, χ_2

Αντίστοιχα δουλεύεις αν θέλεις να δείξεις ότι υπάρχουν περισσότερα των -2- χαρακτηριστικά σημεία

Αφού, από υπόθεση, η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ θα έχω ότι είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right]$.

Οι παραστάσεις $f'(\chi_1), f'(\chi_2)$ έχουν συντελεστές 1 και 1 οπότε, $\gamma = \frac{1\alpha + 1\beta}{1 + 1}$

Ακόμα αφού είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) θα είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right)$

Άρα εφαρμόζεται για την f το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right]$ άρα υπάρχουν $\chi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ και $\chi_2 \in \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right)$ ώστε:

$$f'(\chi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = 2 \frac{f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\chi_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = 2 \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta-\alpha} \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχω:

$$f'(\chi_1) + f'(\chi_2) = 2 \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\beta-\alpha} + 2 \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta-\alpha} = 2 \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Π.Χ. 3) Δίνεται συνάρτηση f παρ/μη στο $[0, \pi]$ με $f(0)=0$ και $f(\pi) < 2$ (1).
Δείξτε ότι υπάρχει $\chi_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f'(\chi_0) < \eta\mu\chi_0$

Λύση

Μου δίνονται στοιχεία για $f(0)$ και $f(\pi)$, ζητούν $f'(\chi_0) < \eta\mu\chi_0 \Leftrightarrow$
 $f'(\chi_0) - \eta\mu\chi_0 < 0$ μάλλον Θ.Μ.Τ. στην $h(\chi) = f(\chi) + \sigma\upsilon\nu\chi$

Θεωρώ την $h(\chi) = f(\chi) + \sigma\upsilon\nu\chi$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (αφού f παρ/μη θα είναι και συνεχής) και παρ/μη στο $(0, \pi)$, με $h'(\chi) = f'(\chi) - \eta\mu\chi$. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., επομένως θα υπάρχει

$$\chi_0 \in (0, \pi) \text{ ώστε: } h(\chi_0) = \frac{h(\pi) - h(0)}{\pi - 0} \Leftrightarrow f'(\chi_0) - \eta\mu\chi_0 = \frac{f(\pi) - 2}{\pi} < 0 \Leftrightarrow f'(\chi_0) < \eta\mu\chi_0$$

Π.Χ. 4) Δίνεται η παρ/μη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $3f(1) + 2f(2) + f(3) = e(3 + 2e + e^2)$ και $(f(1) - e)(f(3) - e^3) \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\chi_1, \chi_2, \chi_0 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f'(\chi_1) + f'(\chi_2) = e^1 + e^2 + \frac{(f(3) - e^3)(1 - \chi_0) + (f(1) - e)(3 - \chi_0)}{\chi_0^2 - 4\chi_0 + 3}$$

Λύση

$$\text{Έχω: } 3f(1) + 2f(2) + f(3) = e(3 + 2e + e^2) \Leftrightarrow 3f(1) - 3e + 2f(2) - 2e^2 + f(3) - e^3 = 0$$

Θεωρώ την συνάρτηση g με τύπο $g(\chi) = f(\chi) - e^\chi$

Η g είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά παρ/μων συναρτήσεων), με $g'(\chi) = f'(\chi) - e^\chi$, άρα **συνεχής** στο $\mathbb{R}$, οπότε και **στο** $[1, 3]$

Από το θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής έχω ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [1, 3]$ με $m = g(\xi_1) \leq g(\chi) \leq g(\xi_2) = M \quad \forall \chi \in [1, 3]$

$$\text{Οπότε για } \chi = 1 \text{ έχω } m \leq g(1) \leq M \Rightarrow 3m \leq 3g(1) \leq 3M$$

$$\text{για } \chi = 2 \text{ έχω } m \leq g(2) \leq M \Rightarrow 2m \leq 2g(2) \leq 2M$$

$$\text{και για } \chi = 3 \text{ έχω } m \leq g(3) \leq M$$

$$\text{με πρόσθεση κατά μέλη έχω } 6m \leq 3g(1) + 2g(2) + g(3) \leq 6M \Rightarrow m \leq \frac{3g(1) + 2g(2) + g(3)}{6} \leq M$$

$$\text{Όμως } 3g(1) + 2g(2) + g(3) = 3f(1) - 3e + 2f(2) - 2e^2 + f(3) - e^3 = 0 \quad \text{άρα } m \leq 0 \leq M$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρώ ότι $\xi_1 < \xi_2$

Έχω λοιπόν ότι η g είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και ότι το μηδέν βρίσκεται μεταξύ των τιμών $g(\xi_1)$ και $g(\xi_2)$, οπότε από το θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών γνωρίζω ότι υπάρχει $\xi_0 \in [\xi_1, \xi_2]$ ώστε $g(\xi_0) = 0$ (1)

Παρουσιάζεται το άθροισμα $\kappa \cdot h(\alpha) + \lambda \cdot h(\beta) + \mu \cdot h(\gamma)$

Θυμάμαι από τις μεθόδους στα θεωρήματα συνέχειας, ότι είναι πολύ πιθανό, να με βοηθήσει ο συνδυασμός των θεωρημάτων, Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής και Ενδιάμεσων Τιμών, στην $h(\chi)$

Θέλω να δείξω ότι υπάρχουν $\chi_1, \chi_2, \chi_0 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f'(\chi_1) + f'(\chi_2) = e^{\chi_1} + e^{\chi_2} + \frac{(f(3) - e^3)(1 - \chi_0) + (f(1) - e)(3 - \chi_0)}{\chi_0^2 - 4\chi_0 + 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\chi_1) - e^{\chi_1} + f'(\chi_2) - e^{\chi_2} = \frac{(f(3) - e^3)(1 - \chi_0) - (f(1) - e)(3 - \chi_0)}{\chi_0^2 - 4\chi_0 + 3}$$

Από (1) έχω ότι υπάρχει $\xi_0 \in [\xi_1, \xi_2] \subseteq [1, 3]$ Θέλω να δείξω σχέση με άθροισμα των παραστάσεων
 ώστε $g(\xi_0) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_0) - e^{\xi_0} = 0$ και επειδή Π(χ_1) = $f'(\chi_1) - e^{\chi_1}$ και Π(χ_2) = $f'(\chi_2) - e^{\chi_2}$, οι οποίες είναι αντίστοιχα οι $g'(\chi_1)$ και $g'(\chi_2)$.
 $(f(1) - e)(f(3) - e^3) \neq 0$ θα έχω $\xi_0 \in (1, 3)$
 Η g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[1, \xi_0]$ και $[\xi_0, 3]$ και παρ/σιμη στα Θα πρέπει να επιλέξω κατάλληλο διάστημα (προφανώς το $[1, 3]$) και να το χωρίσω σε δύο υποδιαστήματα (προφανώς με το ξ_0)

$(1, \xi_0)$ και $(\xi_0, 3)$ με $g'(\chi) = f'(\chi) - e^{\chi}$, οπότε εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[1, \xi_0]$ και $[\xi_0, 3]$ άρα υπάρχουν $\chi_1 \in (1, \xi_0)$ και $\chi_2 \in (\xi_0, 3)$

$$\text{ώστε: } g'(\chi_1) = \frac{g(\xi_0) - g(1)}{\xi_0 - 1} \stackrel{(\alpha)}{=} \frac{g(1)}{1 - \xi_0} \quad \text{και} \quad g'(\chi_2) = \frac{g(3) - g(\xi_0)}{3 - \xi_0} \stackrel{(\beta)}{=} \frac{g(3)}{3 - \xi_0}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (α) και (β) έχω:

$$g'(\chi_1) + g'(\chi_2) = \frac{g(1)}{1 - \xi_0} + \frac{g(3)}{3 - \xi_0} = \frac{g(1)(3 - \xi_0) + g(3)(1 - \xi_0)}{(1 - \xi_0)(3 - \xi_0)} \stackrel{\substack{\text{θέτω} \\ \xi_0 = \chi_0}}{\Leftrightarrow}$$

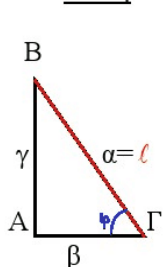
$$\Leftrightarrow f'(\chi_1) - e^{\chi_1} + f'(\chi_2) - e^{\chi_2} = \frac{(f(3) - e^3)(1 - \chi_0) - (f(1) - e)(3 - \chi_0)}{\chi_0^2 - 4\chi_0 + 3}$$

- 14) Αν μας ζητήσουν να βρούμε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή ενός μεγέθους εργαζόμαστε ως εξής:
- (α) Γράφουμε τον τύπο του μεγέθους (ο οποίος συνήθως εξαρτάται από δύο μεταβλητές)
 - (β) Αντικαθιστούμε τη μία μεταβλητή με τη βοήθεια της άλλης, (δηλ. κάνουμε το μέγεθος συνάρτηση μιας μεταβλητής) με μία από τις παρακάτω σκέψεις:
 - αν δίνεται η τιμή ενός δεύτερου μεγέθους τότε από τον τύπο του δεύτερου μεγέθους επιλύω ως προς τη μία μεταβλητή
 - αν σε γεωμετρικό σχήμα δίνεται ένα μήκος τότε ψάχνω για ορθογώνιο τρίγωνο που χρησιμοποιεί στις πλευρές του το δοσμένο μήκος και τις δύο μεταβλητές, και εφαρμόζω Πυθαγόρειο θεώρημα ή τύπους Τριγωνομετρίας
 - αν σε γεωμετρικό σχήμα δίνονται δύο μήκη τότε ψάχνω δύο όμοια τρίγωνα που χρησιμοποιούν στις πλευρές τους τα δοσμένα μήκη και τις δύο μεταβλητές, και κάνω χρήση του ότι οι πλευρές τους είναι ανάλογες. (κοίτα μεθοδολογίες στο κεφάλαιο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)
 - (γ) Βρίσκοντας τη μονοτονία και τα ακρότατα της παραπάνω συνάρτησης υπολογίζω τη ζητούμενη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή του μεγέθους.

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

- Π.χ 1) Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή υποτείνουσα μήκους ℓ να βρείτε αυτό που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Λύση



Το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ δίνεται: $E = \frac{\beta \cdot \gamma}{2}$

Δεν είναι σταθερά μήκη

Παρατηρώ ότι εξαρτάται από δύο μεταβλητές τις β, γ

Από το διπλανό σχήμα έχω: $\gamma = \ell \cdot \eta\mu\varphi$ και $\beta = \ell \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$

$$\text{Άρα } E = \frac{\ell^2 \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{2} = \frac{\ell^2}{4} \cdot \eta\mu 2\varphi = E(\varphi), \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Αφού φ
γωνία
ορθογωνίου
τριγώνου

Έχω ότι η $E(\varphi) = \frac{\ell^2}{4} \cdot \eta \mu 2\varphi$ είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και παραγωγίσιμη με

$$E'(\varphi) = \left(\frac{\ell^2}{4} \cdot \eta \mu 2\varphi\right)' = \frac{\ell^2}{2} \cdot \sigma \upsilon \nu 2\varphi$$

$$E'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell^2}{2} \cdot \sigma \upsilon \nu 2\varphi = 0 \Leftrightarrow \sigma \upsilon \nu 2\varphi = 0 \stackrel{2\varphi \in (0, \pi)}{\Leftrightarrow} 2\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$E'(\varphi) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ell^2}{2} \cdot \sigma \upsilon \nu 2\varphi > 0 \Leftrightarrow \sigma \upsilon \nu 2\varphi > 0 \Leftrightarrow 2\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $E'(\varphi)$, μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της $E(\varphi)$ και τα ακρότατά της

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$E'(\varphi)$		+	—
$E(\varphi)$			

Άρα θα έχω:

$E \nearrow$ για $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ και $E \searrow$

για $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα το Εμβα-

δό του τριγώνου παίρνει τη

μέγιστη τιμή του όταν $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Τότε θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{\pi}{4}$ οπότε από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσα μήκους ℓ αυτό που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το ισοσκελές.

Π.χ. 2) Να βρείτε τα σημεία M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 1 + \sqrt{36 - x}$ που έχουν από το σημείο $A(1,1)$ την ελάχιστη απόσταση. Μετά να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AM είναι κάθετο στην εφαπτόμενη της C_f στο σημείο M .

Λύση

Έστω $M(\mu, f(\mu)) = M(\mu, 1 + \sqrt{36 - \mu})$ το ζητούμενο σημείο με $\mu \in (-\infty, 36]$

(αφού η f ορίζεται για $x \in (-\infty, 36]$)

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AM δίνεται από τη σχέση:

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(\mu - 1)^2 + (\sqrt{36 - \mu})^2} = \sqrt{\mu^2 - 3\mu + 37} = d(\mu)$$

Η συνάρτηση $d(\mu) = \sqrt{\mu^2 - 3\mu + 37}$ με $\mu \in (-\infty, 36]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη

$$\text{με } d'(\mu) = \left(\sqrt{\mu^2 - 3\mu + 37}\right)' = \frac{2\mu - 3}{2\sqrt{\mu^2 - 3\mu + 37}}$$

$$d'(\mu) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\mu - 3}{2\sqrt{\mu^2 - 3\mu + 37}} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{2} \text{ και } d'(\mu) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\mu - 3}{2\sqrt{\mu^2 - 3\mu + 37}} > 0 \stackrel{\sqrt{\mu^2 - 3\mu + 37} > 0}{\Leftrightarrow} \mu > \frac{3}{2}$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $d'(\mu)$, μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της $d(\mu)$ και τα ακρότατά της

μ	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	36
$d'(\mu)$		—	+
$d(\mu)$			

Παρατηρώ ότι η d έχει ολικό ελάχιστο όταν $\mu = \frac{3}{2}$. Άρα το σημείο της C_f που απέχει από το σημείο $A(1,1)$ τη μικρότερη απόσταση είναι το $M\left(\frac{3}{2}, 1 + \sqrt{\frac{69}{2}}\right)$

Για να δω αν το ευθύγραμμο τμήμα AM είναι κάθετο στην εφαπτόμενη της C_f στο σημείο M , θα ελέγξω αν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης, λ_ε της εφαπτόμενης και λ_{AM} του τμήματος AM , ισούται με -1

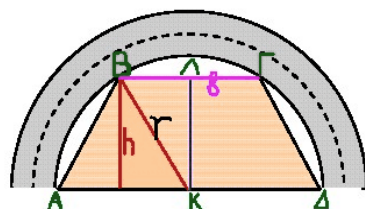
$$\text{Έχω: } \lambda_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1 + \sqrt{\frac{69}{2}} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 2\sqrt{\frac{69}{2}}$$

Ακόμα έχω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 36)$ με $f'(x) = (1 + \sqrt{36 - x})' = \frac{-1}{2\sqrt{36 - x}}$,

άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης της C_f στο M είναι $\lambda_\varepsilon = f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{69}}$

Άρα $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AM} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{69}} \cdot 2\sqrt{\frac{69}{2}} = -1$. Άρα $AM \perp (\varepsilon)$

Π.Χ. 3) Σε οικόπεδο σχήματος ημικυκλίου με ακτίνα $r = 20$ m, θέλουμε να φτιάξουμε οικοδομή με κάτοψη σχήματος τραπεζίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του τραπεζίου ώστε το εμβαδόν του να είναι μέγιστο. (βλέπε διπλανό σχήμα)



Λύση

Για το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ έχω: $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{B\Gamma + A\Delta}{2} \cdot h$

Θέτοντας $A\Delta = 2r = 40$ και $B\Gamma = \beta$ θα έχω: $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{\beta + 40}{2} \cdot h$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BAK ($\hat{A} = 90^\circ$) έχω $BA = \frac{\beta}{2}$, $AK = h$ και $BK = r = 20$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχω $\frac{\beta^2}{4} + h^2 = 400 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{1600 - \beta^2}}{2}$, $\beta \in (0, 40)$

Οπότε η (1) γράφεται $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{(\beta + 40) \cdot \sqrt{1600 - \beta^2}}{4} = E(\beta)$

Έχω ότι η συνάρτηση $E(\beta)$ είναι συνεχής στο $(0, 40)$ και παραγωγίσιμη με

$$E'(\beta) = \left(\frac{(\beta + 40) \cdot \sqrt{1600 - \beta^2}}{4} \right)' = \frac{1}{4} \left(\sqrt{1600 - \beta^2} + \frac{(\beta + 40) \cdot (-2\beta)}{2\sqrt{1600 - \beta^2}} \right) = \frac{-\beta^2 - 20\beta + 800}{2\sqrt{1600 - \beta^2}}$$

$$E'(\beta) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\beta^2 - 20\beta + 800}{2\sqrt{1600 - \beta^2}} = 0 \Leftrightarrow -\beta^2 - 20\beta + 800 = 0 \Leftrightarrow$$

$$E'(\beta) > 0 \Leftrightarrow \frac{-\beta^2 - 20\beta + 800}{2\sqrt{1600 - \beta^2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{1600 - \beta^2} > 0}{2\sqrt{1600 - \beta^2}} \Leftrightarrow -\beta^2 - 20\beta + 800 > 0 \Leftrightarrow \beta \in (0, 20)$$

κοίτα στον πίνακα

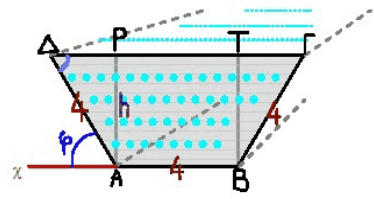
Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $E'(\beta)$, μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της $E(\beta)$ και τα ακρότατά της

β	-40	0	20	40
$E'(\beta)$	-	+	0	-
$E(\beta)$		↗	↘	

Άρα θα έχω: $E \nearrow$ για $\beta \in (0, 20]$ και $E \searrow$ για $\beta \in [20, 40)$ άρα το Εμβαδόν του τραπεζίου γίνεται μέγιστο όταν $\beta = 20$ m και

$$h = \frac{\sqrt{1600 - 20^2}}{2} \Rightarrow h = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

Π.Χ. 4) Κατασκευαστική εταιρία χρησιμοποιώντας έτοιμες πλάκες πλάτους 4 m, φτιάχνει την κοίτη ενός ποταμού της οποίας η διατομή έχει σχήμα ισοσκελούς τραπεζίου (βλέπε σχήμα). Να βρείτε τη γωνία φ ώστε το εμβαδόν της διατομής να γίνεται μέγιστο



Λύση

Το εμβαδόν του τραπεζίου ABΓΔ δίνεται $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot h$

Έχω $AB = 4$ και $\Delta\Gamma = \Delta P + PT + T\Gamma = \Delta P + 4 + T\Gamma$ (1)

Επειδή τα τρίγωνα ΔPA και ΓTB είναι ίσα (είναι ορθογώνια ($\hat{P} = \hat{T} = 1^\circ$) και $TB = PA = h$, $\hat{P} = \hat{T}$ (γωνίες ισοσκελούς τραπεζίου))

έχω $PA = T\Gamma$. Ακόμα έχω

$\hat{P}\hat{A}A = \hat{A}\hat{A}x = \varphi$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Delta\Gamma$ και AB που τέμνονται από την AD)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $P\Delta A$ έχω $\Delta P = \Delta A \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\Delta} \Rightarrow \Delta P = 4\sigma\upsilon\nu\varphi$ και

$$PA = \Delta A \cdot \eta\mu\hat{\Delta} \Rightarrow h = 4\eta\mu\varphi$$

Έτσι από (1) έχω $\Delta\Gamma = 4 + 8\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{8 + 8\sigma\upsilon\nu\varphi}{2} \cdot 4\eta\mu\varphi \Rightarrow$

$$E_{AB\Gamma\Delta} = 16(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) \cdot \eta\mu\varphi = E(\varphi) \text{ με } \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(αφού φ είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου)

Έχω ότι η $E(\varphi)$ είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και παραγωγίσιμη με

$$E'(\varphi) = (16(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) \cdot \eta\mu\varphi)' = 16 \cdot (-\eta\mu^2\varphi + (1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi) \Rightarrow$$

$$E'(\varphi) \stackrel{\eta\mu^2\varphi = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\varphi}{=} 16 \cdot (2\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi - 1) = 16 \cdot (2\sigma\upsilon\nu\varphi - 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi + 1)$$

Το $2\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi - 1$ είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς $\sigma\upsilon\nu\varphi$ με ρίζες $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = \frac{1}{2}$ άρα γράφεται $2 \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{1}{2}) \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi + 1) = (2\sigma\upsilon\nu\varphi - 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi + 1)$ ΘΥΜΗΣΟΥ ότι: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$

$$E'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow 16 \cdot (2\sigma\upsilon\nu\varphi - 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2} \\ \text{ή} \\ \sigma\upsilon\nu\varphi = -1 \end{cases} \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$E'(\varphi) > 0 \Leftrightarrow 16 \cdot (2\sigma\upsilon\nu\varphi - 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu\varphi + 1) > 0 \quad \begin{matrix} \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ άρα} \\ \sigma\upsilon\nu\varphi + 1 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{1}{2} > 0 \quad \begin{matrix} \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \end{matrix}$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $E'(\varphi)$, μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της $E(\varphi)$ και τα ακρότατά της

φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$E'(\varphi)$		+	-
$E(\varphi)$		↗	↘

Άρα θα έχω:

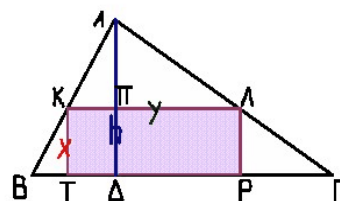
$E \nearrow$ για $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ και $E \searrow$

για $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα το Εμβαδό

του τραπεζίου παίρνει τη

μέγιστη τιμή του όταν $\varphi = \frac{\pi}{3}$

Π.χ. 5) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma = 20$ και ύψος $A\Delta = h = 10$ να εγγράψετε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $K\Lambda PT$ με μέγιστο εμβαδόν (βλέπε σχήμα)



Λύση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $K\Lambda PT$ ισούται $E_{K\Lambda PT} = (K\Lambda) \cdot (KT) = x \cdot y$

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AK\Lambda$ είναι όμοια αφού έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή και $\hat{B} = \hat{K}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $B\Gamma$ και $K\Lambda$ που τέμνονται από την AB άρα θα έχουν τα αντίστοιχα μεγέθη τους ανάλογα. Άρα θα ισχύει $\frac{K\Lambda}{B\Gamma} = \frac{A\Lambda}{A\Delta}$ (1)

Από υπόθεση έχω ότι $B\Gamma = 20$ και $A\Delta = 10$. Ακόμα από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι είναι: $K\Lambda = y$ και $A\Lambda = A\Delta - \Pi\Delta = 10 - KT = 10 - x$

Άρα (1) $\Leftrightarrow \frac{y}{20} = \frac{10-x}{10} \Leftrightarrow y = 20 - 2x$ άρα $E_{K\Lambda PT} = x \cdot (20 - 2x) = 20x - 2x^2 = E(x)$

Προφανώς για τα μήκη x, y θα ισχύουν $\begin{cases} x > 0 \text{ και} \\ y > 0 \Leftrightarrow 20 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 10 \end{cases}$ άρα $x \in (0, 10)$

Η $E(x)$ είναι συνεχής στο $(0, 10)$ και παραγωγίσιμη με $E'(x) = (20x - 2x^2)' = 20 - 4x$

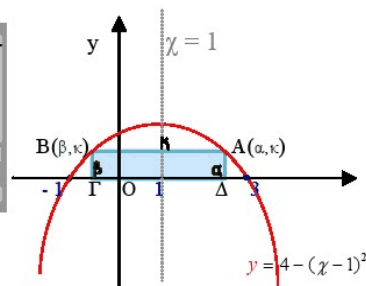
$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$ και $E'(x) > 0 \Leftrightarrow 20 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < 5$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $E'(x)$, μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της $E(x)$ και τα ακρότατά της.

x	0	5	10
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	↗		↘

Άρα θα έχω: $E \nearrow$ για $x \in (0, 5]$ και $E \searrow$ για $x \in [5, 10)$ άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου γίνεται μέγιστο όταν $x = 5$ και $y = 20 - 2 \cdot 5 = 10$

Π.χ. 6) Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4 - (x - 1)^2$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ να είναι μέγιστο.



Λύση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ισούται με $E_{AB\Gamma\Delta} = (\Delta\Gamma) \cdot (A\Delta)$

Έχω $\Delta\Gamma = \alpha - \beta$ και $A\Delta = \kappa$

Επειδή στο παραπάνω σχήμα η ευθεία $\chi = 1$ είναι άξονας συμμετρίας θα έχω ότι η τιμή $\chi = 1$ είναι η μέση τιμή των αριθμών α, β άρα θα ισχύει $\frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \Leftrightarrow \beta = 2 - \alpha$

Ακόμα έχω ότι το σημείο $A(\alpha, \kappa)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f άρα θα είναι

$$\kappa = f(\alpha) \Rightarrow \kappa = 4 - (\alpha - 1)^2 = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$$

Έτσι θα έχω $\Delta\Gamma = \alpha - (2 - \alpha) = 2\alpha - 2$ και $A\Delta = -\alpha^2 + 2\alpha + 3$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ισούται με

$$E_{AB\Gamma\Delta} = (2\alpha - 2) \cdot (-\alpha^2 + 2\alpha + 3) = -2\alpha^3 + 6\alpha^2 + 2\alpha - 6 = E(\alpha) \text{ με } \alpha \in (1, 3)$$

Η $E(\alpha)$ είναι συνεχής στο $(1, 3)$ και παραγωγίσιμη με

$$E'(\alpha) = (-2\alpha^3 + 6\alpha^2 + 2\alpha - 6)' = -6\alpha^2 + 12\alpha + 2 = 2 \cdot (-3\alpha^2 + 6\alpha + 1)$$

$$E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-3\alpha^2 + 6\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \notin (1, 3) \text{ απορ.} \\ \alpha = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \in (1, 3) \text{ δεκτή} \end{cases}$$

$$E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-3\alpha^2 + 6\alpha + 1) > 0 \stackrel{\alpha \in (1, 3)}{\Leftrightarrow} \alpha \in \left(1, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $E'(\alpha)$, μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της $E(\alpha)$ και τα ακρότατά της

α	$\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	3
$E'(\alpha)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$E(\alpha)$		$\nearrow$	$\searrow$	

Άρα θα έχω: $E \nearrow$ για $\alpha \in \left(1, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$ και $E \searrow$ για $\alpha \in \left[\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, 3\right)$ άρα το Εμβαδόν του ορθογωνίου

παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο όταν $\alpha = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$, οπότε:

$$\beta = 2 - \frac{3+2\sqrt{3}}{3} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \text{ και } \kappa = f\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \kappa = 4 - \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3} - 1\right)^2 = \frac{8}{3}. \text{ Άρα οι ζη-}$$

τούμενες συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι: $A\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ και $B\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right)$

Π.Χ. 7) Αγρότης θέλει να κατασκευάσει αποθήκη σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και εμβαδού 100 m^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις της ώστε η κατασκευή της να του στοιχίσει ελάχιστα.

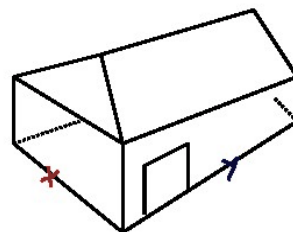
Λύση

Προφανώς το κόστος κατασκευής της αποθήκης είναι ανάλογο της περιμέτρου της.

Η περίμετρός της ισούται $\Pi = 2x + 2y$

$$\text{Έχω } E = 100 \Rightarrow x \cdot y = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x}$$

$$\text{Άρα } \Pi = 2x + 2 \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x} = \Pi(x) \text{ με } x > 0$$



Η $\Pi(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και παρ/μη με $\Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x}\right)' = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2}$

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} = 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 10 \text{ και } \Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x > 10$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $\Pi'(x)$, μπορώ εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της $\Pi(x)$ και τα ακρότατά της

x	$-\infty$	-10	0	10	$+\infty$	
$\Pi'(x)$		+	0	-	0	+
$\Pi(x)$				↘		↗

Άρα θα έχω: $\Pi \nearrow$ για $x \in (0, 10]$ και $\Pi \searrow$ για $x \in [10, +\infty)$ άρα η περίμετρος της αποθήκης γίνεται ελάχιστη όταν $x = 10$ και $y = \frac{100}{10} = 10$

Επομένως το κόστος κατασκευής της αποθήκης θα είναι ελάχιστο αν την φτιάξει να έχει πλάτος $x = 10$ m και μήκος $y = 10$ m (δηλ. η κάτοψή της είναι σχήματος τετραγώνου)

- Π.Χ. 8) Σε κατάστημα όπου πωλούνται κινητά τηλέφωνα, ένας ξεπερασμένος τύπος κινητού κοστίζει 90 €. Ο καταστηματάρχης για να προσελκύσει μια ομάδα εκδρομέων μαθητών κάνει την εξής προσφορά: Αν οι μαθητές αγοράσουν μέχρι 8 κινητά τότε θα πληρώσουν κάθε κινητό στην αρχική του τιμή (δηλ. 90 €). Αν όμως αγοράσουν περισσότερα κινητά, τότε με την αγορά κάθε επιπλέον κινητού, θα γίνεται έκπτωση στο καθένα από το σύνολο των αγορασθέντων κινητών, από 5 €. Να βρείτε μέχρι πόσα κινητά θα πρέπει να κάνει την προσφορά του ώστε να έχει τη μέγιστη εισπραξη.

Λύση

Η εισπραξη του εμπόρου από την πώληση των κινητών τηλεφώνων θα ισούται με
Εισπραξη = (Σύνολο πωληθέντων κινητών) · (Τιμή πώλησης)

Έστω ότι έπεισε x , ($x > 8$) μαθητές να αγοράσουν κινητό. Τότε στην τιμή κάθε κινητού θα γίνεται έκπτωση $(x - 8) \cdot 5$ €, και η τιμή πώλησης κάθε κινητού θα είναι $90 - (x - 8) \cdot 5$ €
Άρα θα έχει Εισπραξη: $x \cdot [90 - (x - 8) \cdot 5] = -5x^2 + 130x = E(x)$

Η $E(x)$ είναι συνεχής στο $(8, +\infty)$ και παρ/μη με $E'(x) = (-5x^2 + 130x)' = -10x + 130$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -10x + 130 = 0 \Leftrightarrow x = 13$ και $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -10x + 130 > 0 \Leftrightarrow x < 13$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $E'(x)$, μπορούμε εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της $E(x)$ και τα ακρότατά της

x	8	13	$+\infty$
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$	↗		↘

Άρα θα έχω: $E \nearrow$ για $x \in (8, 13]$ και $E \searrow$ για $x \in [13, +\infty)$, άρα η εισπραξη του εμπόρου θα είναι μέγιστη αν πουλήσει 13 κινητά τηλέφωνα.

Άρα αν ζητηθούν περισσότερα από 13 κινητά ο έμπορος θα πρέπει να μην τα δώσει λέγοντας κάποια δικαιολογία (π.χ. δεν έχει άλλα).

- Π.Χ. 9) Σε ορθό κώνο με ακτίνα βάσης $R=4$ και ύψος $h=10$ να εγγραφείτε ορθό κύλινδρο μεγίστου όγκου.

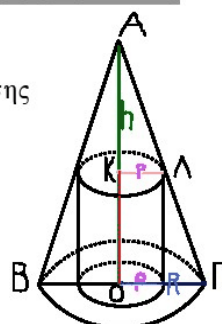
Λύση

Ο όγκος του κυλίνδρου ισούται $V = \pi \rho^2 \cdot (\text{OK})$ όπου ρ η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και (OK) το ύψος του. Από τα δεδομένα έχω:

$$(\text{OK}) = (\text{OA}) - (\text{AK}) = h - (\text{AK}) = 10 - (\text{AK}) \quad (1) \quad \text{και} \quad (\text{OG}) = R = 4$$

Τα τρίγωνα AOG και AKL έχουν $\hat{\text{O}} = \hat{\text{K}} = 90^\circ$ και τη γωνία $\hat{\text{A}}$ κοινή άρα είναι όμοια, άρα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές ανάλογες. Άρα θα

$$\text{έχω} \quad \frac{(\text{AK})}{(\text{AO})} = \frac{(\text{KL})}{(\text{OG})} \Leftrightarrow \frac{10 - (\text{OK})}{10} = \frac{\rho}{4} \Leftrightarrow (\text{OK}) = \frac{20 - 5\rho}{2} \quad \text{Άρα ο όγκος του κυλίνδρου}$$



θα ισούται: $V = \pi \rho^2 \cdot \frac{20-5\rho}{2} = \frac{20\pi\rho^2 - 5\pi\rho^3}{2} = V(\rho).$

Προφανώς θα πρέπει $\begin{cases} \rho > 0 \\ (\text{OK}) > 0 \Leftrightarrow \frac{20-5\rho}{2} > 0 \Leftrightarrow \rho < 4 \end{cases}$ και άρα $\rho \in (0, 4)$

Η $V(\rho)$ είναι συνεχής στο $(0, 4)$ και παραγωγίσιμη με

$$V'(\rho) = \left(\frac{20\pi\rho^2 - 5\pi\rho^3}{2} \right)' = \frac{40\pi\rho - 15\pi\rho^2}{2} = \frac{5\pi\rho \cdot (8-3\rho)}{2}$$

$$V'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \frac{40\pi\rho - 15\pi\rho^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \rho \in (0, 4) \quad \rho = \frac{8}{3} \quad \text{και}$$

$$V'(\rho) > 0 \Leftrightarrow \frac{5\pi\rho \cdot (8-3\rho)}{2} > 0 \Leftrightarrow \rho \in \left(0, \frac{8}{3} \right)$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $V'(\rho)$, μπορού εύκολα να βγάλω τα συμπεράσματά μου για τη μονοτονία της $V(\rho)$ και τα ακρότατά της.

ρ	0	$\frac{8}{3}$	4
$V'(\rho)$	-	+	-
$V(\rho)$		↗	↘

Άρα θα έχω: $V \nearrow$ για

$\rho \in \left(0, \frac{8}{3} \right]$ και $V \searrow$ για

$\rho \in \left[\frac{8}{3}, 4 \right)$ άρα ο όγκος του κυλίνδρου γίνεται μέγιστος

όταν η ακτίνα της βάσης του είναι $\rho = \frac{8}{3}$ και το ύψος του είναι $(\text{OK}) = \frac{20-5\frac{8}{3}}{2} = \frac{10}{3}$

EXTRA τρόπος εύρεσης μέγιστης — ελάχιστης τιμής ενός μεγέθους M

► Αν από τα δεδομένα καταλήξεις σε

1) ισότητα: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\chi \in \mathbb{R}$, στην οποία συμμετέχει το μέγεθος M λες: Για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει να είναι $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \dots$ καταλήξεις σε ανίσωση στην οποία συμμετέχει το M, από την οποία βρίσκεις το μέγιστο ή το ελάχιστο που ζητάς

2) $M = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\chi \in \mathbb{R}$ τότε θα έχεις

*) αν $\alpha > 0$ τότε το μέγεθος παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $M = \frac{-\Delta}{4\alpha}$ όταν $\chi = \frac{-\beta}{2\alpha}$

**) αν $\alpha < 0$ τότε το μέγεθος παρουσιάζει μέγιστη τιμή την $M = \frac{-\Delta}{4\alpha}$ όταν $\chi = \frac{-\beta}{2\alpha}$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ η Διακρίνουσα το τριωνύμου

π.χ. 1) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: α) παραγωγίζονται στο

$\chi_0 \in A_f \cap A_g$ και $g(\chi_0) \neq 0$ β) τα γραφήματα των $f, g, \frac{f}{g}$ έχουν την ίδια μη μηδενική

κλίση στο χ_0 . Να βρείτε ποια θα μπορούσε να είναι η μέγιστη τιμή της f για $\chi = \chi_0$ και ποια η αντίστοιχη τιμή της g για $\chi = \chi_0$

Λύση

Έχω ότι ορίζεται η $\frac{f}{g}$ στο $\chi_0 \in A_f \cap A_g$ (αφού $g(\chi_0) \neq 0$) και ότι υπάρχει η $\left(\frac{f}{g}\right)'(\chi_0)$ (αφού f, g παραγωγίσιμες στο χ_0)

Ακόμα αφού τα γραφήματα των $f, g, \frac{f}{g}$ έχουν την ίδια μη μηδενική κλίση (έστω λ) στο χ_0

$$\text{θα είναι } f'(\chi_0) = g'(\chi_0) = \left(\frac{f}{g}\right)'(\chi_0) \Leftrightarrow f'(\chi_0) = g'(\chi_0) = \frac{f'(\chi_0) \cdot g(\chi_0) - f(\chi_0) \cdot g'(\chi_0)}{g^2(\chi_0)} \xrightarrow{\text{κλίση}=\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{\lambda g(\chi_0) - \lambda f(\chi_0)}{g^2(\chi_0)} \Leftrightarrow \lambda g^2(\chi_0) = \lambda g(\chi_0) - \lambda f(\chi_0) \xrightarrow{\lambda \neq 0} f(\chi_0) = -g^2(\chi_0) + g(\chi_0)$$

Άρα το $f(\chi_0)$ ισούται με την τιμή του Δευτεροβάθμιου τριωνύμου $y = -g^2(\chi_0) + g(\chi_0)$ που έχει συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου : $-1 < 0$ άρα η μεγαλύτερη τιμή που θα μπορούσε να πάρει η $f(\chi_0)$ είναι η $f(\chi_0) = \frac{-\Delta}{4\alpha} = \frac{1}{4}$ όταν $g(\chi_0) = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{1}{2}$

ΠΡΟΣΕΞΤΕ! Δεν μπορώ να θέσω $g(\chi_0) = k, k \in \mathbb{R}$ και να παραγωγίσω την $h(k) = -k^2 + k$ (οπότε με ακρότητα να βρω τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή) αφού δεν γνωρίζω αν η μεταβλητή $k = g(\chi_0) \in \mathbb{R}$ παίρνει συνεχείς τιμές στο $\mathbb{R}$

- 15) Εύρεση Κοίλων – Κυρτών – Σημείων καμπής μιας δοσμένης συνάρτησης f
- ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ (i) Βρίσκω το Πεδίο Ορισμού A_f της f και εξασφαλίζω ότι είναι συνεχής.
(ii) Βρίσκω τον τύπο της $f'(x)$ οπουδήποτε ορίζεται. **(εξασφαλίζεται η ύπαρξη εφαπτόμενης)**
(iii) Βρίσκω την $f''(x)$ και φτιάχνω τον πίνακα μεταβολής των προσήμων της.

(στα σημεία που δεν ορίζεται η $f'(x)$ και αλλάζει πρόσημο η $f''(x)$, ελέγχω αν υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f).

- ΘΥΜΗΣΟΥ ΟΤΙ: 1) Αν $f''(x) > 0 \ \forall x \in \Delta$ τότε η C_f είναι κυρτή στο Δ ✓
Αν $f''(x) < 0 \ \forall x \in \Delta$ τότε η C_f είναι κοίλη στο Δ ✓
2) Σημεία καμπής είναι τα σημεία στα οποία
(α) f συνεχής
(β) η f'' αλλάζει πρόσημο (ή ισοδύναμα η f' αλλάζει μονοτονία) Δηλ. αλλάζουν τα κοίλα
(γ) υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ τα σημεία $(\chi_0, f(\chi_0))$ στα οποία η f'' μηδενίζεται (δηλ. $f''(\chi_0) = 0$) και εκατέρωθεν τους η f'' αλλάζει πρόσημο είναι σημεία καμπής (η συνέχεια και η ύπαρξη εφαπτόμενης είναι δεδομένη από τη στιγμή που υπάρχει η $f''(\chi_0) = 0$)

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ 1) Να μελετηθεί ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = \begin{cases} |x^2 - 3x| & , x \geq 0 \\ x^3 + 3x^2 + 3x & , x < 0 \end{cases} \quad (ii) g(x) = e^{2x} - 2x^2 - x + 1$$

Λύση

Έχω ότι η $\chi^2 - 3\chi$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $(0, +\infty)$, ως πολωνυμική
 άρα και η $f(x) = |\chi^2 - 3\chi|$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ακόμα η $f(x) = \chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi$
 είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ επίσης ως πολωνυμική.

$$\left. \begin{aligned} \text{Για το } \chi_0 = 0 \text{ έχω } \lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{\chi \rightarrow 0^-} |\chi^2 - 3\chi| = 0 \\ \lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{\chi \rightarrow 0^+} (\chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi) = 0 \text{ και} \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Άρα η } f \text{ είναι συνεχής} \\ &\text{και στο } \chi_0 = 0, \text{ Άρα η } f \\ &\text{είναι συνεχής σ' όλο το } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Θα μελετήσω την f ως προς την παραγωγισιμότητα

ΣΚΕΨΗ

Για $\chi \geq 0$ έχω $f(\chi) = |\chi^2 - 3\chi|$ οπότε για να μπορέσω να εφαρμόσω
 τους κανόνες παραγώγισης πρέπει να γράψω την f χωρίς απόλυτη τιμή

χ	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$\chi^2 - 3\chi$	$+$	0	$-$	$+$

Σύμφωνα με το διπλανό πίνακα μεταβολής προσή-
 μων της $\chi^2 - 3\chi$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} -\chi^2 + 3\chi & , \chi \in [0, 3) \\ \chi^2 - 3\chi & , \chi \in [3, +\infty) \\ \chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi & , \chi < 0 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ και $(3, +\infty)$ με

$$f'(x) = \begin{cases} -2\chi + 3 & , \chi \in (0, 3) \\ 2\chi - 3 & , \chi \in (3, +\infty) \\ 3\chi^2 + 6\chi + 3 & , \chi \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Για το } \chi_0 = 0 \text{ έχω: } \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\chi^3 + 3\chi^2 + 3\chi}{\chi} = 3 \\ \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{-\chi^2 + 3\chi}{\chi} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0) = 3$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Για το } \chi_0 = 3 \text{ έχω: } \lim_{\chi \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{\chi - 3} &= \lim_{\chi \rightarrow 3^-} \frac{-\chi^2 + 3\chi - 0}{\chi - 3} = -3 \\ \lim_{\chi \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{\chi - 3} &= \lim_{\chi \rightarrow 3^+} \frac{\chi^2 - 3\chi - 0}{\chi - 3} = 3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Άρα η } f \text{ στο } \chi_0 = 3 \\ &\text{ούτε είναι παραγωγί-} \\ &\text{σιμη και ούτε δέχεται} \\ &\text{εφαπτόμενη} \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά για την παράγωγο της } f \text{ έχω: } f'(x) = \begin{cases} -2\chi + 3 & , \chi \in [0, 3) \\ 2\chi - 3 & , \chi \in (3, +\infty) \\ 3\chi^2 + 6\chi + 3 & , \chi \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, 3), (3, +\infty)$ με:

$$f''(\chi) = \begin{cases} -2 & , \chi \in (0, 3) \\ 2 & , \chi \in (3, +\infty) \\ 6\chi + 6 & , \chi \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\text{Για το } \chi_0 = 0 \text{ έχω: } \left. \begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{f'(\chi) - f'(0)}{\chi - 0} &= \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{3\chi^2 + 6\chi + 3 - 3}{\chi} = 6 \\ \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{f'(\chi) - f'(0)}{\chi - 0} &= \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{-2\chi + 3 - 3}{\chi} = -2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Άρα δεν υπάρχει η} \\ \text{δεύτερη παράγωγος} \\ \text{της στο } \chi_0 = 3 \end{array}$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $f''(\chi)$, μπορώ εύκολα να βρω πως στρέφει τα κοίλα η f καθώς και τα σημεία καμψής της

χ	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f''(\chi)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
$f(\chi)$					

Επομένως η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (δηλ. είναι κυρτή) σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$, $[3, +\infty)$, ενώ προς τα κάτω (κοίλη) στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[0, 3]$

Τα σημεία καμψής της γραφικής παράστασης της f είναι τα $(-1, f(-1)) = (-1, -1)$ και $(0, f(0)) = (0, 0)$, αφού σ' αυτά τα σημεία ορίζεται η εφαπτόμενη της C_f , και η $f''(\chi)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των: $\chi_1 = -1$ και $\chi_2 = 0$

Στο σημείο $(3, f(3)) = (3, 0)$, η f δεν παρουσιάζει καμψή, παρ' όλο που η $f''(\chi)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $\chi_3 = 3$, επειδή σ' αυτό το σημείο δεν ορίζεται η εφαπτόμενη της C_f

(ii) Η $g(\chi) = e^{2\chi} - 2\chi^2 - \chi + 1$ ορίζεται $\forall \chi \in \mathbb{R}$, και είναι συνεχής και δύο φορές παρα-

γωγίσμη με $g'(\chi) = (e^{2\chi} - 2\chi^2 - \chi + 1)' = 2e^{2\chi} - 4\chi - 1$ και $g''(\chi) = (2e^{2\chi} - 4\chi - 1)' \Rightarrow$
 $g''(\chi) = 4e^{2\chi} - 4, \chi \in \mathbb{R}$

$$g''(\chi) = 0 \Leftrightarrow 4e^{2\chi} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{2\chi} = 1 \Leftrightarrow \chi = 0 \text{ και } g''(\chi) > 0 \Leftrightarrow 4e^{2\chi} - 4 > 0 \Leftrightarrow e^{2\chi} > 1 \Leftrightarrow \chi > 0$$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $g''(\chi)$, μπορώ εύκολα να βρω πως στρέφει τα κοίλα η g καθώς και τα σημεία καμψής της

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(\chi)$	$-$	0	$+$
$g(\chi)$			

Επομένως η g στρέφει τα κοίλα προς τα άνω (δηλ. είναι κυρτή) στο διάστημα $[0, +\infty)$, ενώ προς τα κάτω (δηλ. κοίλη) στο διάστημα $(-\infty, 0]$

Το σημείο $(0, g(0)) = (0, 2)$, είναι σημείο καμψής της C_g , αφού έχω $g''(0) = 0$ και η g'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $\chi_0 = 0$

Π.Χ. 2) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

- (i) Να βρεθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμψής της γραφικής της παράστασης
 (ii) Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ τα ακρότατα και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ το σημείο καμψής
 να δείξετε ότι: (α) Τα σημεία A , B , Γ είναι συνευθειακά
 (β) Τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Γ

Λύση

(i) Η $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$, και είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x^3 - 6x^2 - 15x + 4)' \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$, $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) = (3x^2 - 12x - 15)' \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$, $x \in \mathbb{R}$

Από τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου των $f'(x)$ και $f''(x)$, μπορώ εύκολα να βρω τα ακρότατα και τα σημεία καμψής της C_f

χ	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f''(\chi)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$						

Επομένως η f παρουσιάζει
 τοπικό μέγιστο στο σημείο
 $(-1, f(-1)) = (-1, 12)$, τοπικό
 ελάχιστο στο σημείο
 $(5, f(5)) = (5, -96)$ και καμψή
 στο σημείο $(2, f(2)) = (2, -42)$

(ii) Έχω $A(-1, 12)$, $B(5, -96)$ και $\Gamma(2, -42)$

(α) 1^{ος} τρόπος Για να δείξω ότι τα σημεία A , B , Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξω ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ είναι παράλληλα.

Έχω $\vec{AB} = (x_\beta - x_\alpha, y_\beta - y_\alpha) = (6, -108)$ και $\vec{A\Gamma} = (x_\gamma - x_\alpha, y_\gamma - y_\alpha) = (3, -54)$

Παρατηρώ ότι $\vec{AB} = (6, -108) = 2(3, -54) = 2\vec{A\Gamma}$ άρα $\vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma}$

Μια δεύτερη σκέψη είναι να δείξω ότι $\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = 0$ Έχω

$$\det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 6 & -108 \\ 3 & -54 \end{vmatrix} = -216 + 216 = 0 \text{ άρα } \vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma}$$

(β) Αφού από το (α) έχω ότι τα σημεία A , B , Γ είναι συνευθειακά, για να δείξω ότι τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Γ , αρκεί να δείξω ότι $|\vec{A\Gamma}| = |\vec{\Gamma B}|$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Έχω } |\vec{A\Gamma}| = \sqrt{(x_\gamma - x_\alpha)^2 + (y_\gamma - y_\alpha)^2} = \sqrt{3^2 + 54^2} \\ \text{και } |\vec{\Gamma B}| = \sqrt{(x_\beta - x_\gamma)^2 + (y_\beta - y_\gamma)^2} = \sqrt{3^2 + 54^2} \end{array} \right\} \text{ Άρα } |\vec{A\Gamma}| = |\vec{\Gamma B}|$$

2^{ος} τρόπος

Επειδή θέλω να δείξω ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα τα A, B συμμετρικά ως προς το Γ αρκεί να δείξω ότι το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος AB *βλέπε σχήμα*



Παρατηρώ ότι το μέσο του τμήματος AB έχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{x_\alpha + x_\beta}{2}, \frac{y_\alpha + y_\beta}{2} \right) = (2, -42) \text{ που είναι ίδιες με τις συντεταγμένες του σημείου } \Gamma$$

Άρα το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος AB , άρα τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα τα A, B είναι συμμετρικά ως προς το Γ .

151) Μας δίνουν μια συνάρτηση f με παραμέτρους, και ζητούν να βρούμε για ποιες τιμές της παραμέτρου η C_f παρουσιάζει καμπή σε κάποιο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$

ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ

(i) Βρίσκω το πεδίο ορισμού A_f της f και εξασφαλίζω ότι είναι συνεχής.

(ii) Βρίσκω την $f''(x)$ οπουδήποτε ορίζεται.

(iii) Λέω: Για να παρουσιάζει η C_f καμπή στο $A(x_0, f(x_0))$ θα πρέπει η f' να έχει ακρότατο στο x_0 , άρα $f''(x_0) = 0$ και με όποια άλλη εξίσωση προκύπτει από τα δεδομένα, φτιάχνω σύστημα, από τη λύση του οποίου υπολογίζω τις ζητούμενες παραμέτρους.

(iv) (αν δεν είναι "εγγυημένο" ότι το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής) Κάνω επαλήθευση (με τον πίνακα μεταβολής προσήμων της $f''(x)$) για το αν πράγματι η C_f παρουσιάζει καμπή στο $A(x_0, f(x_0))$, για τις τιμές της παραμέτρου που βρήκα.

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Πχ 1) Να βρεθούν αν υπάρχουν οι τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 2$ να παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A(-1, 5)$

Λύση

Η f ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$, και είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta \text{ και } f''(x) = 6x - 2\alpha$$

Για να παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A(-1, 5)$ θα πρέπει να ισχύουν:
$$\begin{cases} f''(-1) = 0 \\ \text{και} \\ f(-1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -6 - 2\alpha = 0 \\ \text{και} \\ -1 - \alpha - \beta - 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \text{και} \\ \beta = -5 \end{cases}$$

Επαλήθευση Για τις τιμές $\alpha = -3$ και $\beta = -5$ έχω: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 2$ και $f''(x) = 6x + 6$

χ	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Από τον διπλανό πίνακα, όπου φαίνονται οι μεταβολές του πρόσημου της $f''(x)$, εύκολα βρίσκω πως η f , πράγματι, παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A(-1, f(-1)) = A(-1, 5)$

152) Μας δίνουν μια συναρτησιακή σχέση (ισότητα) που ικανοποιεί μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, και ζητούν να δείξουμε ότι δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο της

ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ (i) Παραγωγίζω διαδοχικά δυο φορές τη δοσμένη ισότητα.

(ii) Λέω: Έστω ότι παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$. Τότε θα πρέπει $f''(\chi_0) = 0$

(iv) Αντικαθιστώ στην ισότητα που προέκυψε από τη δεύτερη παραγωγή όπου χ το χ_0 και καταλήγω σε άτοπο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μια ακόμα καλή ιδέα – δύσκολα όμως εφαρμόσιμη – είναι να υπολογίσεις την $f''(x)$ και να δείξεις ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο.

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Π.χ. 1) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$f^2(\chi) + \chi f(\chi) = 2 - \chi^2 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι η } C_f \text{ δεν παρουσιάζει καμπή.}$$

Λύση

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη ισότητα έχω:

$$(f^2(\chi) + \chi f(\chi))' = (2 - \chi^2)' \Rightarrow 2f(\chi) \cdot f'(\chi) + f(\chi) + \chi f'(\chi) = -2\chi \Rightarrow$$

$$(2f(\chi) \cdot f'(\chi) + f(\chi) + \chi f'(\chi))' = (-2\chi)' \Rightarrow (2f'(\chi))^2 + 2f(\chi) \cdot f''(\chi) + 2f'(\chi) + \chi f''(\chi) = -2 \quad (1)$$

Έστω ότι η C_f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$. Τότε θα είναι $f''(\chi_0) = 0$

Αντικαθιστώντας στην (1) όπου χ το χ_0 θα έχω:

$$2(f'(\chi_0))^2 + 2f(\chi_0) \cdot f''(\chi_0) + 2f'(\chi_0) + \chi_0 f''(\chi_0) = -2 \xrightarrow{f''(\chi_0)=0} 2(f'(\chi_0))^2 + 2f'(\chi_0) + 2 = 0 \Leftrightarrow (f'(\chi_0))^2 + f'(\chi_0) + 1 = 0 \quad (2)$$

Όμως η ισότητα (2) είναι αδύνατο να ισχύει αφού είναι τριώνυμο ως προς $f'(\chi_0)$ με

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0.$$

Άρα η C_f δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο της

Π.χ. 2) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

α) η εφαπτόμενή της, σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, τέμνει και τις δύο διχοτόμους των αξόνων $\chi\chi$ και $\chi\chi$ (χωρίς να ταυτίζεται με καμία τους) και

$$\beta) (f(\chi))^2 + f(\chi) = \chi^2 - 2\chi - 2004 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν παρουσιάζει καμπή.

Λύση

Παραγωγίζοντας τη δοσμένη ισότητα έχω:

$$\left[(f(x))^2 + f(x) \right]' = (x^2 - 2x - 2004)' \Rightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + f'(x) = 2x - 2 \text{ και}$$

$$(2f(x) \cdot f'(x) + f'(x))' = (2x - 2)' \Rightarrow 2(f'(x))^2 + 2f(x) \cdot f''(x) + f''(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Έστω ότι η C_f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in \mathbb{R}$

Τότε θα είναι $f''(x_0) = 0$

Αντικαθιστώντας στην (1) όπου x το x_0 θα έχω:

$$2(f'(x_0))^2 + 2f(x_0) \cdot f''(x_0) + f''(x_0) = 2 \xrightarrow{f''(x_0)=0} 2(f'(x_0))^2 = 2 \Leftrightarrow (f'(x_0))^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 1 \\ \text{ή} \\ f'(x_0) = -1 \end{cases}$$

που είναι αδύνατο αφού

αν $f'(x_0) = 1$ τότε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα είναι παράλληλη

με την ευθεία $y = x$, ή θα ταυτίζεται με αυτή, ενώ

αν $f'(x_0) = -1$ τότε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα είναι παράλληλη,

ή θα ταυτίζεται με την ευθεία $y = -x$,

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, δεν θα τέμνει κάποια από τις δύο διχοτόμους των αξόνων xx' και yy' (Άτοπο λόγω της υπόθεσης)

153) Μας δίνουν μια συνάρτηση f με παραμέτρους και ζητούν να βρούμε για ποιες τιμές της παραμέτρου η C_f είναι σταθερή ως προς τα κοίλα (δηλ. ή στρέφει τα κοίλα άνω σ' όλο το Πεδίο Ορισμού της, ή στρέφει τα κοίλα κάτω σ' όλο το Πεδίο Ορισμού της) Τότε:

ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ

(i) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f στο οποίο εξασφαλίζουμε ότι είναι συνεχής και βρίσκουμε την $f''(x)$ (η οποία συνήθως εξαρτάται από ένα παραμετρικό δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x)

(ii) Γράφουμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η $f''(x)$ ώστε η C_f να στρέφει τα κοίλα όπως μας ζητούν (π.χ. για να στρέφει τα κοίλα κάτω σ' όλο το Πεδίο Ορισμού της θα πρέπει $f''(x) < 0 \quad \forall x \in A_f$)

(iii) Στηριζόμενοι στο πως μεταβάλλονται τα πρόσημα του τριωνύμου (κοίτα στην περίπτωση 54), βρίσκουμε τους περιορισμούς που θα πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι.

(iv) Ελέγχουμε τα κοίλα της f για την ειδική περίπτωση που η παράμετρος παίρνει τις τιμές που μηδενίζεται η Διακρίνουσα (και που βρήκαμε στο βήμα (iii)).

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Π.χ. 1) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\lambda}{4}x^4 - \frac{\lambda}{3}x^3 - \frac{\lambda-1}{2}x^2 - x - 3$.

Λύση

Έχω ότι η f ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$(f(x))' = \left(\frac{\lambda}{4}x^4 - \frac{\lambda}{3}x^3 - \frac{\lambda-1}{2}x^2 - x - 3 \right)' \Rightarrow f'(x) = \lambda x^3 - \lambda x^2 - (\lambda-1)x - 1, x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f''(x) = (\lambda x^3 - \lambda x^2 - (\lambda-1)x - 1)' \Rightarrow f''(x) = 3\lambda x^2 - 2\lambda x - (\lambda-1), x \in \mathbb{R}$$

Για να είναι η f κυρτή σ' όλο το $\mathbb{R}$ θα πρέπει $\forall x \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 3\lambda x^2 - 2\lambda x - (\lambda-1) > 0 \quad (1)$$

Επειδή είναι $\lambda \neq 0$ θα έχω ότι η $f''(x)$ είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x και άρα για να ισχύει η (1) θα πρέπει :

$$\lambda > 0 \quad (i) \quad \text{και}$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 12\lambda \cdot (\lambda-1) < 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 12\lambda < 0 \Leftrightarrow 4\lambda \cdot (4\lambda - 3) < 0$$

Από το διπλανό πίνακα που δείχνει πως μεταβάλλονται τα πρόσημα της Διακρίνουσας για τις διάφορες

τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}^*$ έχω ότι $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ (ii)

λ	$-\infty$	0	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
Δ	+	*	-	+

Από (i) και (ii) έχω ότι $\lambda \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$

Ειδικά αν $\lambda = \frac{3}{4}$ τότε:

$$f''(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(3x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \text{ άρα η συνάρτηση}$$

είναι κυρτή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$, άρα κυρτή σ' όλο το $\mathbb{R}$.

Τελικά έχω ότι η f είναι κυρτή σ' όλο το $\mathbb{R}$ όταν $\lambda \in \left(0, \frac{3}{4}\right]$

Π.χ. 2) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{\lambda}{3}x^3 - x^2 - \sin x \cdot (12x - 4\lambda) - \eta\mu x \cdot (3x^2 - 2\lambda x - 16), \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Δείξτε ότι $f''(x) = (\eta\mu x - 1) \cdot (3x^2 - 2\lambda x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$

Λύση

α) Έχω ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{\lambda}{3}x^3 - x^2 - \sin x \cdot (12x - 4\lambda) - \eta\mu x \cdot (3x^2 - 2\lambda x - 16) \right)' \Rightarrow$$

$$f'(x) = -x^3 + \lambda x^2 - 2x - \left[(\sin x)' \cdot (12x - 4\lambda) + \sin x \cdot (12x - 4\lambda)' \right] -$$

$$- \left[(\eta\mu x)' \cdot (3x^2 - 2\lambda x - 16) + \eta\mu x \cdot (3x^2 - 2\lambda x - 16)' \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 f'(\chi) &= -\chi^3 + \lambda\chi^2 - 2\chi - [-\eta\mu\chi \cdot (12\chi - 4\lambda) + 12 \cdot \sigma\nu\chi] - \\
 &\quad [\sigma\nu\chi \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi - 16) + \eta\mu\chi \cdot (6\chi - 2\lambda)] \Rightarrow \\
 f'(\chi) &= -\chi^3 + \lambda\chi^2 - 2\chi + \eta\mu\chi \cdot (12\chi - 4\lambda) - 12 \cdot \sigma\nu\chi - \sigma\nu\chi \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi - 16) - \eta\mu\chi \cdot (6\chi - 2\lambda) \Rightarrow \\
 f'(\chi) &= -\chi^3 + \lambda\chi^2 - 2\chi + \eta\mu\chi \cdot (12\chi - 4\lambda - 6\chi + 2\lambda) - \sigma\nu\chi \cdot (12 + 3\chi^2 - 2\lambda\chi - 16) \Rightarrow \\
 f'(\chi) &= -\chi^3 + \lambda\chi^2 - 2\chi + \eta\mu\chi \cdot (6\chi - 2\lambda) - \sigma\nu\chi \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi - 4), \quad \chi \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 f''(\chi) &= \left(-\chi^3 + \lambda\chi^2 - 2\chi + \eta\mu\chi \cdot (6\chi - 2\lambda) - \sigma\nu\chi \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi - 4) \right)' \Rightarrow \\
 f''(\chi) &= -3\chi^2 + 2\lambda\chi - 2 + \left[(\eta\mu\chi)' \cdot (6\chi - 2\lambda) + \eta\mu\chi \cdot (6\chi - 2\lambda)' \right] - \\
 &\quad \left[(\sigma\nu\chi)' \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi - 4) + \sigma\nu\chi \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi - 4)' \right] \Rightarrow \\
 f''(\chi) &= -3\chi^2 + 2\lambda\chi - 2 + [\sigma\nu\chi \cdot (6\chi - 2\lambda) + 6 \cdot \eta\mu\chi] - \\
 &\quad [-\eta\mu\chi \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi - 4) + \sigma\nu\chi \cdot (6\chi - 2\lambda)] \Rightarrow \\
 f''(\chi) &= -3\chi^2 + 2\lambda\chi - 2 + \sigma\nu\chi \cdot (6\chi - 2\lambda) + 6 \cdot \eta\mu\chi + \eta\mu\chi \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi - 4) - \sigma\nu\chi \cdot (6\chi - 2\lambda) \Rightarrow \\
 f''(\chi) &= -3\chi^2 + 2\lambda\chi - 2 + \eta\mu\chi \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi + 2) \Rightarrow f''(\chi) = (\eta\mu\chi - 1) \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi + 2), \quad \chi \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

β) για να είναι η f κοίλη στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει $\forall \chi \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

$$f''(\chi) < 0 \Leftrightarrow (\eta\mu\chi - 1) \cdot (3\chi^2 - 2\lambda\chi + 2) < 0 \stackrel{\eta\mu\chi - 1 \leq 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} 3\chi^2 - 2\lambda\chi + 2 > 0 \quad (1)$$

Όμως το πρώτο μέλος της (1) είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς χ και άρα για να ισχύει θα πρέπει να έχω $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 24 < 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (\lambda - \sqrt{6}) \cdot (\lambda + \sqrt{6}) < 0$

Από το διπλανό πίνακα που δείχνει πως μεταβάλλονται τα πρόσημα της Διακρίνουσας για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έχω ότι $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ (i)

λ	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
Δ		+	-	+

Ειδικά αν $\lambda = -\sqrt{6}$ τότε :

Θυμηθείτε ότι αν $\Delta = 0$ τότε $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha \cdot \left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$

$$f''(\chi) = (\eta\mu\chi - 1) \cdot (3\chi^2 + 2\sqrt{6}\chi + 2) = (\eta\mu\chi - 1) \cdot (\sqrt{3}\chi + \sqrt{2})^2 \leq 0, \quad \forall \chi \in \mathbb{R} \quad (ii) \quad \text{και}$$

αν $\lambda = -\sqrt{6}$ τότε :

$$f''(\chi) = (\eta\mu\chi - 1) \cdot (3\chi^2 - 2\sqrt{6}\chi + 2) = (\eta\mu\chi - 1) \cdot (\sqrt{3}\chi - \sqrt{2})^2 \leq 0, \quad \forall \chi \in \mathbb{R} \quad (iii)$$

άρα η συνάρτηση είναι κοίλη και σ' όλο το $\mathbb{R}$ και στις περιπτώσεις (ii) και (iii) .

Τελικά από (i), (ii), (iii) έχω ότι η f είναι κοίλη σ' όλο το $\mathbb{R}$ όταν $\lambda \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

16) Υπολογισμός ορίων με τη χρήση του κανόνα DE L' HOSPITAL

(Για την περίπτωση που ζητάς το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, και καταλήγεις σε

μία από τις μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ (i) Εξασφαλίζω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε μια περιοχή κοντά στο x_0 .

(v) Υπολογίζω (εφ' όσον υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(vi) Θα έχω $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Με το να έχουμε δεδομένο ότι μια εκ των συναρτήσεων f και g , είναι παραγωγίσιμη μόνο στο x_0 , και όχι σε μια περιοχή κοντά στο x_0 , ΔΕΝ μπορώ να εφαρμόσω τον κανόνα DE L' HOSPITAL.

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Π.χ 1) Να Υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\nu x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \ln x}{x + e^x}$

(vi) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{\eta\mu^2(x-1)}$

Λύση

(i) Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \eta\mu x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sigma\nu x) = 0$ Δηλ. το ζητούμενο όριο

είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ άρα εφαρμόζεται ο κανόνας DE L' HOSPITAL, άρα έχω :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \eta\mu x)'}{(1 - \sigma\nu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\nu x}{\eta\mu x} \quad (1)$$

Όμως και το παραπάνω όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ άρα εφαρμόζοντας και πάλι τον

$$\text{κανόνα DE L' HOSPITAL, θα έχω } (1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sigma\nu x)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sigma\nu x} = \frac{\eta\mu 0}{\sigma\nu 0} = \frac{0}{1} = 0$$

(ii) Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι της

μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$ άρα εφαρμόζεται ο κανόνας DE L' HOSPITAL, άρα έχω :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(iii) Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι

της μορφής $\frac{0}{0}$ άρα εφαρμόζεται ο κανόνας DE L' HOSPITAL, άρα έχω :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

(iv) Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι της

μορφής $\frac{0}{0}$ άρα εφαρμόζεται ο κανόνας DE L' HOSPITAL, άρα έχω :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

(v) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty$, έχω ότι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \ln x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x) = +\infty$ Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι της

μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$ άρα εφαρμόζεται ο κανόνας DE L' HOSPITAL, άρα έχω :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \ln x}{x + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + \ln x)'}{(x + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 1/x}{1 + e^x} = \frac{2 + 0}{1 + \infty} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

(vi) Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 - x + 1) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (\eta\mu^2(x-1)) = 0$ Δηλ. το ζητούμενο

όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ άρα εφαρμόζεται ο κανόνας DE L' HOSPITAL, άρα

$$\text{έχω : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{\eta\mu^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - x^2 - x + 1)'}{(\eta\mu^2(x-1))'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu(x-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{\eta\mu(x-1)} = (1)$$

Παρατηρώ ότι και το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{\eta\mu(x-1)}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$

άρα εφαρμόζοντας πάλι τον κανόνα DE L' HOSPITAL, θα έχω

$$(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu(x-1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 - 2x - 1)'}{(\eta\mu(x-1))'} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{\sigma\upsilon\nu(x-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Σχόλιο-Παρατήρηση

Προσέξτε ότι το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu(x-1)}$$

είναι της μορφής $\frac{0}{0}$

και ότι στη προσπάθεια εφαρμογής τον κανόνα DE L' HOSPITAL, θα είχα "δύσκολη" παραγωγή του παρονομαστή $2\eta\mu(x-1)\sigma\upsilon\nu(x-1)$, έτσι λοιπόν απομόνωσα σ' ένα όριο τους παράγοντες που μου δίνουν τη μορφή $\frac{0}{0}$

Και ... ένα παράδειγμα για... να μην ξεχνάμε τις παλιές καλές μεθόδους !

Π.χ 2) Να Υπολογίσετε το: $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sin\chi}}{\chi}$

Λύση

Παρατηρώ ότι $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \sqrt{1-\sin\chi} = 0$ και $\lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi) = 0$ Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ άρα εφαρμόζεται ο κανόνας DE L' HOSPITAL, άρα έχω :

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sin\chi}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1-\sin\chi})'}{(\chi)'} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-\sin\chi}} \cdot (-\sin\chi)'}{1} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu\chi}{2\sqrt{1-\sin\chi}} \quad (1)$$

Όμως και το παραπάνω όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ άρα εφαρμόζοντας πάλι τον κανόνα DE L' HOSPITAL, θα έχω:

$$(1) = \frac{1}{2} \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{(\eta\mu\chi)'}{(\sqrt{1-\sin\chi})'} = \dots = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sin\chi \cdot \sqrt{1-\sin\chi}}{\eta\mu\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} (\sin\chi) \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sin\chi}}{\eta\mu\chi} = \sin 0 \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1-\sin\chi})'}{(\eta\mu\chi)'} = 1 \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu\chi}{2\sin\chi \cdot \sqrt{1-\sin\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\sin\chi} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu\chi}{\sqrt{1-\sin\chi}} \quad (2)$$

Παρατηρήστε από (1) και (2) ότι καταλήγω σε φαύλο κύκλο, δηλαδή μου είναι αδύνατο να υπολογίσω με τον κανόνα DE L' HOSPITAL το παραπάνω όριο, γι αυτό θα δοκιμάσω να το υπολογίσω με τις παλιές κλασικές μεθόδους υπολογισμού ορίων. (Ευκαιρία για να τους κάνεις μια γρήγορη επανάληψη !!)

A' τρόπος

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sin\chi}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{(1-\sin\chi) \cdot (1+\sin\chi)}}{\chi \cdot \sqrt{1+\sin\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sin^2\chi}}{\chi \cdot \sqrt{1+\sin\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\eta\mu^2\chi}}{\chi \cdot \sqrt{1+\sin\chi}} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{|\eta\mu\chi|}{\chi \cdot \sqrt{1+\sin\chi}} \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow 0^- \\ \text{έχω } \eta\mu\chi < 0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{-\eta\mu\chi}{\chi \cdot \sqrt{1+\sin\chi}} = - \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+\sin\chi}} \stackrel{\substack{\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 1}}{=} -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

B' τρόπος

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sin\chi}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-1+2\eta\mu^2\frac{\chi}{2}}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \left| \eta\mu\frac{\chi}{2} \right|}{\chi} = \sqrt{2} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{-\eta\mu\frac{\chi}{2}}{\frac{\chi}{2} \cdot 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lim_{\frac{\chi}{2} \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu\frac{\chi}{2}}{\frac{\chi}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

161) Ιδιόμορφες περιπτώσεις ορίων που (συνήθως) μετατρέπονται σε μορφές οι οποίες επιλύονται με κανόνα DE L' HOSPITAL

α) Για την περίπτωση που ζητάς το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, και κατα-

λήγεις στη μορφή $0 \cdot (\pm\infty)$, γράψε: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

β) Για την περίπτωση που ζητάς το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, και καταλήγεις στη μορφή $+\infty - \infty$ ή $-\infty + \infty$, γράψε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) \right] \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[g(x) \cdot \left(1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right) \right]$$

γ) Για την περίπτωση που ζητάς το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)}$ με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, και καταλήγεις στη μορφή 0^0 ή $(+\infty)^0$ ή $(1)^{\pm\infty}$ ή $(0)^{\pm\infty}$, (απροσδιοριστία εκθετικής μορφής),

γράφει: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[e^{g(x) \ln(f(x))} \right]$ και αναζητάς το $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot \ln(f(x)))$

(που συνήθως καταλήγει στην α) περίπτωση)

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Π.χ. 1) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \cdot \ln x) & \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] & \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x-1} \\ \text{(iv)} \lim_{x \rightarrow 0} x^x & \text{(v)} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{\ln x} & \text{(vi)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\eta \mu x)^{\phi x} \\ \text{(vii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) & \text{(viii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + e^x \right)^{\frac{1}{x}} & \text{(ix)} \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)^{\frac{1}{x-1}} \end{array}$$

Λύση

(i) Έχω ότι η $f(x) = x^3 \cdot \ln x$ ορίζεται για $x \in (0, +\infty)$, άρα έχει νόημα το ζητούμενο όριο

Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) = -\infty$ (Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $0 \cdot (-\infty)$)

$$\text{Έχω} \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \right) \quad (\alpha)$$

Προτίμησα να βάλω την $\ln x$ στον αριθμητή γιατί παραγωγίζοντας τον αριθμητή θα εξαφανιστεί ο

λογάριθμος, ενώ αν έγραφα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 / \frac{1}{\ln x} \right)$,

παραγωγίζοντας τον παρονομαστή, δεν θα εξαφανιζόταν ο λογάριθμος

Παρατηρώ ότι $\lim_{\chi \rightarrow 0} \ln \chi = -\infty$ και $\lim_{\chi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\chi^3} \right)^{\chi > 0} = +\infty$ Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι

της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ άρα εφαρμόζεται ο κανόνας DE L' HOSPITAL, άρα έχω (α)

$$= \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\ln \chi)'}{\left(\frac{1}{\chi^3} \right)'} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\chi}}{\frac{-3}{\chi^4}} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{-\chi^3}{3} = 0$$

(ii) Έχω ότι η $f(\chi) = \chi \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)$ ορίζεται για $\chi \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, άρα έχει νόημα το ζητούμενο όριο

Παρατηρώ ότι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi = +\infty$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \ln(1 + 1/\chi) = 0$ (Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $0 \cdot (+\infty)$)

Έχω:

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\chi \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)}{\frac{1}{\chi}} \right) \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{0}{0} \\ \text{εφαρμόζω κανόνα} \\ \text{DE L' HOSPITAL}}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\left(\ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \right)'}{\left(\frac{1}{\chi} \right)'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1/\chi^2}{1 + 1/\chi}}{-1/\chi^2} = \dots$$

$$\dots = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi}{\chi + 1} = 1$$

Για τους ίδιους λόγους με την (i) περίπτωση, προτίμησα να βάλω στον αριθμητή την $\ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)$

(iii) Έχω ότι η $f(\chi) = \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)^{2\chi-1}$ ορίζεται για $\chi \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, άρα έχει νόημα το

ζητούμενο όριο Παρατηρώ ότι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) = 1$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (2\chi - 1) = +\infty$ (Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $(1)^{+\infty}$)

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)^{2\chi-1} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[e^{(2\chi-1) \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)} \right] \quad (1)$$

$$\text{Θα υπολογίσω το } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[(2\chi - 1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right) \right] \stackrel{(+\infty) \cdot 0}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{\chi} \right)}{\frac{1}{2\chi - 1}} \right] \quad (\beta)$$

Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x-1} \right) = 0$ Δηλ. το ζητούμενο όριο

είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ άρα εφαρμόζεται ο κανόνας DE L' HOSPITAL, άρα έχω

$$(\beta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]'}{\left(\frac{1}{2x-1} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1 + 1/x}}{\frac{-2}{(2x-1)^2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 2x} = 2$$

Θέτω στην (1) όπου $(2x-1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = u$ Έχω ότι για $x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow 2$ άρα

$$(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x-1} = \lim_{u \rightarrow 2} e^u = e^2$$

(iv) Έχω ότι η $f(x) = x^x$ ορίζεται για $x \in (0, +\infty)$, άρα έχει νόημα το ζητούμενο όριο

Παρατηρώ ότι το ζητούμενο όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής 0^0

$$\text{Έχω: } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} \quad (2)$$

Θα υπολογίσω το

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty} \\ \text{εφαρμόζω κανόνα} \\ \text{DE L' HOSPITAL}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

Για τους ίδιους λόγους με την (i) περίπτωση, προτίμησα να βάλω στον αριθμητή την $\ln x$

Θέτω στην (2) όπου $x \cdot \ln x = u$

$$\text{Έχω ότι για } x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0, \quad \text{άρα } (2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1$$

(v) Έχω ότι η $f(x) = \left(\frac{1}{x-1} \right)^{\ln x}$ ορίζεται για $x \in (1, +\infty)$, άρα έχει νόημα το όριο

Παρατηρώ ότι το ζητούμενο όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty)^0$

$$\text{Έχω: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\ln x \cdot \ln \left(\frac{1}{x-1} \right)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\ln x \cdot \ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{e^{\ln x \cdot \ln(x-1)}} \quad (3)$$

Θα υπολογίσω το $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\ln \chi \cdot \ln(\chi - 1)) \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \left[\frac{\ln(\chi - 1)}{\frac{1}{\ln \chi}} \right] \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty} \\ \text{εφαρμοζώ κανόνα} \\ \text{DE L' HOSPITAL}}}{=}$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{(\ln(\chi - 1))'}{\left(\frac{1}{\ln \chi}\right)'} = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{\chi - 1}}{\frac{-1}{\chi \ln^2 \chi}} = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{\chi \ln^2 \chi}{\chi - 1} \stackrel{\substack{0 \\ 0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \chi \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{\ln^2 \chi}{\chi - 1} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{0}{0} \\ \text{εφαρμοζώ κανόνα} \\ \text{DE L' HOSPITAL}}}{=}$$

$$= 1 \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{(\ln^2 \chi)'}{(\chi - 1)'} = \dots = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{2 \ln \chi}{\chi} = 0$$

Εγγραψα μόνο του σ' ένα όριο το χ , που δεν δημιουργεί πρόβλημα, για να απομονώσω αυτούς που δημιουργούν την απροσδιοριστία.

Θέτω στην (3) όπου $\ln \chi \cdot \ln(\chi - 1) = u$

Έχω ότι για $\chi \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$, άρα (3) $\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\chi - 1} \right)^{\ln \chi} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{e^u} = \frac{1}{e^0} = 1$

(vi) Έχω ότι η $f(\chi) = (\eta\mu\chi)^{\varepsilon\phi\chi}$ ορίζεται για $\chi \in (2k\pi, 2k\pi + \pi) - \left\{ 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, άρα

έχει νόημα το ζητούμενο όριο

Παρατηρώ ότι το ζητούμενο όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $(1)^{-\infty}$

Έχω: $\lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\eta\mu\chi)^{\varepsilon\phi\chi} = \lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} e^{\varepsilon\phi\chi \cdot \ln(\eta\mu\chi)} \quad (4)$

Θα υπολογίσω το

$$\lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\varepsilon\phi\chi \cdot \ln(\eta\mu\chi)) \stackrel{(-\infty)0}{=} \lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[\frac{\ln(\eta\mu\chi)}{\frac{1}{\varepsilon\phi\chi}} \right] = \lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[\frac{\ln(\eta\mu\chi)}{\sigma\phi\chi} \right] \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{0}{0} \\ \text{εφαρμοζώ κανόνα} \\ \text{DE L' HOSPITAL}}}{=}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{(\ln(\eta\mu\chi))'}{(\sigma\phi\chi)'} = \lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{\sigma\nu\chi}{\eta\mu\chi}}{\frac{-1}{\eta\mu^2\chi}} = - \lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\eta\mu\chi \cdot \sigma\nu\chi) = 0$$

Θέτω στην (4) όπου $\varepsilon\phi\chi \cdot \ln(\eta\mu\chi) = u$

Έχω ότι για $\chi \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$, άρα (4) $\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\eta\mu\chi)^{\varepsilon\phi\chi} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1$

(vii) Έχω ότι η $f(\chi) = \chi - \ln \chi$ ορίζεται για $\chi \in (0, +\infty)$, άρα έχει νόημα το ζητούμενο όριο

Παρατηρώ ότι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi = +\infty$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\ln \chi) = +\infty$ (Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $+\infty - \infty$)

Έχω: $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi - \ln \chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\chi \left(1 - \frac{\ln \chi}{\chi} \right) \right] \quad (5)$

Όμως $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\ln \chi}{\chi} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{εφαρμοζώ κανόνα} \\ \text{DE L' HOSPITAL}}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \chi)'}{(\chi)'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi} = 0 \quad (6)$

Άρα από (5), (6) $\Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi - \ln \chi) = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$

(viii) Έχω ότι το ζητούμενο όριο έχει νόημα αφού η $f(\chi) = (\chi + e^\chi)^{\frac{1}{\chi}}$ ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, (π.χ στο $(0, +\infty)$ εφ' όσον $\chi + e^\chi > 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$)

Παρατηρώ ότι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi + e^\chi) = +\infty$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\chi} \right) = 0$ (Δηλ. το ζητούμενο όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty)^0$)

Έχω: $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi + e^\chi)^{\frac{1}{\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\chi} \ln(\chi + e^\chi)} \quad (7)$

Θα υπολογίσω το $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\chi} \cdot \ln(\chi + e^\chi) \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\chi + e^\chi)}{\chi} \right) \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{εφαρμοζώ κανόνα} \\ \text{DE L' HOSPITAL}}}{=}$

$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\chi + e^\chi))'}{(\chi)'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^\chi}{\chi + e^\chi} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{εφαρμοζώ κανόνα} \\ \text{DE L' HOSPITAL}}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(1 + e^\chi)'}{(\chi + e^\chi)'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^\chi}{1 + e^\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^\chi} + 1} = 1$

Θέτω στην (7) όπου $e^{\phi \chi \cdot \ln(\eta \mu \chi)} = u$

Έχω ότι για $\chi \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow 1$, άρα (7) $\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi + e^\chi)^{\frac{1}{\chi}} = \lim_{u \rightarrow 1} e^u = e^1 = e$

(ix) Έχω ότι η $f(\chi) = (\ln \chi)^{\frac{1}{\chi-1}}$ ορίζεται για $\chi \in (1, +\infty)$, άρα έχει νόημα το ζητούμενο όριο

Παρατηρώ ότι το ζητούμενο όριο είναι απροσδιοριστία της μορφής $(0)^{+\infty}$

Έχω: $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\ln \chi)^{\frac{1}{\chi-1}} = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{\chi-1} \ln(\ln \chi)} \quad (8)$

Θα υπολογίσω το

$\lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{1}{\chi-1} \cdot \ln(\ln \chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{1}{(\chi-1)} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\ln(\ln \chi)) \stackrel{\substack{\lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{1}{(\chi-1)} = +\infty \\ \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\ln \chi) = 0^+ \text{ άρα } \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\ln(\ln \chi)) = -\infty}}{=} = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

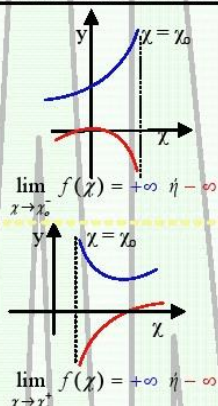
Θέτω στην (8) όπου $\frac{1}{\chi-1} \cdot \ln(\ln \chi) = u$

οπότε για $\chi \rightarrow 1^+ \Rightarrow u \rightarrow -\infty$, άρα (8) $\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow 1^+} (\ln \chi)^{\frac{1}{\chi-1}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$

17) ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ17₁) Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Ορισμός: Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow \chi_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \chi_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = \chi_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: (i) Τα χ_0 στα οποία θα αναζητήσω τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f , είναι τα ανοικτά άκρα των διαστημάτων που συνθέτουν το Πεδίο Ορισμού της f (συμπεριλαμβάνονται τα σημεία αλλαγής τύπου της $f(x)$) Στα εσωτερικά σημεία χ_0 , αποκλείεται να έχω κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού θα έχω $\lim_{x \rightarrow \chi_0} f(x) = f(\chi_0)$ (Θυμήσου ότι κάθε συνάρτηση είναι συνεχής στο Πεδίο Ορισμού της ως εκθετική - ρητή - πολυωνυμική - τριγωνομετρική - ... κ.λ.π.)

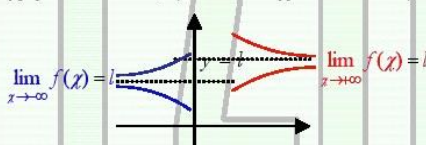


(ii) Μία συνάρτηση μπορεί να έχει από καμία έως απεριόριστο πλήθος κατακόρυφων ασύμπτωτων.

17₂) Οριζόντια ασύμπτωτη

Ορισμός: Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$), τότε η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, (αντίστοιχα στο $-\infty$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μία συνάρτηση μπορεί να έχει καμία, μία ή δύο (από μία σε κάθε άπειρο $(+\infty, -\infty)$), οριζόντιες ασύμπτωτες



Προφανώς η C_f στο $-\infty$ και η C_f στο $+\infty$ είναι μόνο η μία από τις αντίστοιχες του παραπάνω γραφήματος

Για το ποια ακριβώς είναι θα βοηθήσει η $f''(x)$ (που μας δείχνει πώς στρέφονται τα κοίλα της C_f)

17₃) Πλάγια ασύμπτωτη

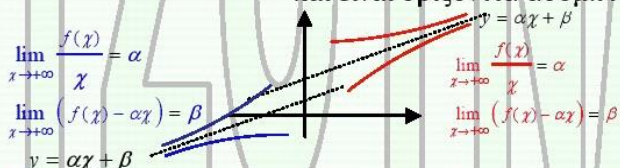
Ορισμός: Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0$, (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0$), τότε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ λέγεται **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, (αντίστοιχα στο $-\infty$)

Θεώρημα Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι **πλάγια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, (αντίστοιχα στο $-\infty$), αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \alpha x] = \beta \in \mathbb{R},$$

$$(\text{αντίστοιχα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \alpha x] = \beta \in \mathbb{R})$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: (i) Αν $\alpha = 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ γράφεται $y = \beta$ και είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f .



(ii) Μία συνάρτηση μπορεί να έχει καμία, μία ή δύο (από μία σε κάθε άπειρο $(+\infty, -\infty)$), πλάγιες ασύμπτωτες

Προφανώς η C_f στο $-\infty$ και η C_f στο $+\infty$ είναι μόνο η μία από τις αντίστοιχες του παραπάνω γραφήματος

Για το ποια ακριβώς είναι θα βοηθήσει η $f''(x)$ (που μας δείχνει πώς στρέφονται τα κοίλα της C_f)

Βήματα για την εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης (i) Υπολογίζω το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$,

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ σταματάω λέγοντας ότι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$,

ενώ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$ συνεχίζω στο επόμενο βήμα

(ii) υπολογίζω το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x)$,

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = \pm\infty$ σταματάω λέγοντας ότι C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, ενώ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta \in \mathbb{R}$, λέω ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$,

(Αντίστοιχα για το $-\infty$)

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Κάθε πολυώνυμο με βαθμό $n \geq 2$ δεν έχει ασύμπτωτες
- Για ρητές συναρτήσεις $f(x) = \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$
 - Αν $n < k$ (δηλ. ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή), τότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ (δηλ. την ευθεία $y=0$).
 - Αν $n = k$ (δηλ. ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με το βαθμό του παρονομαστή), τότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = \frac{\alpha_n}{\beta_k}$.
 - Αν $n = k+1$ (δηλ. ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή κατά μία μονάδα), τότε η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.
 - Αν $n \geq k+2$ (δηλ. ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή τουλάχιστο κατά δύο μονάδες), τότε η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.
- Στο ίδιο άπειρο δεν συνυπάρχουν οριζόντια και πλάγια ασύμπτωτη.

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

π.χ. 1) Να βρεθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}, & x \in (-\infty, 0] - \{-3, -2\} \\ x + \ln x, & x > 0 \end{cases} \quad (ii) f(x) = \frac{x^2 - e^x}{\ln^2 x - 1}$$

Λύση

(i) Για $x_0 \in (-\infty, 0) - \{-3, -2\}$ η f είναι συνεχής ως ρητή άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$

Όμοια για $x_0 > 0$ η f είναι συνεχής ως άθροισμα των συνεχών x και $\ln x$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

Θα αναζητήσω κατακόρυφη ασύμπτωτη στα : $x_0 = -3, -2, 0$

$$\bullet \text{ Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -3} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -3} \frac{\chi^2 - 4}{\chi^2 + 5\chi + 6} \stackrel{\frac{\alpha}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow -3} \frac{\chi^2 - 4}{\chi + 2} \cdot \lim_{\chi \rightarrow -3} \frac{1}{\chi + 3} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lim_{\chi \rightarrow -3} \frac{\chi^2 - 4}{\chi + 2} = -5 \quad \text{και} \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{\chi \rightarrow -3^-} \frac{1}{\chi + 3} = -\infty \text{ άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow -3^-} f(\chi) = -5 \cdot (-\infty) = +\infty \\ \lim_{\chi \rightarrow -3^+} \frac{1}{\chi + 3} = +\infty \text{ άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow -3^+} f(\chi) = -5 \cdot (+\infty) = -\infty \end{array} \right.$$

Άρα η ευθεία $\chi = -3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$$\bullet \text{ Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -2} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{\chi^2 - 4}{\chi^2 + 5\chi + 6} = \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{(\chi - 2) \cdot (\chi + 2)}{(\chi + 3) \cdot (\chi + 2)} = \lim_{\chi \rightarrow -2} \frac{\chi - 2}{\chi + 3} = -4 \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{ Έχω } \lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{\chi^2 - 4}{\chi^2 + 5\chi + 6} = \frac{-2}{3} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0^+} (\chi + \ln \chi) = -\infty \quad (\text{αφού } \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \ln \chi = -\infty)$$

Άρα και η ευθεία $\chi = 0$ (δηλ. ο άξονας $y'y$)

είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$$(ii) \text{ Έχω } A_f = (0, 1/e) \cup (1/e, e) \cup (e, +\infty),$$

Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών άρα $\forall \chi_0 \in A_f$ έχω $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = f(\chi_0) \in \mathbb{R}$

θα αναζητήσω κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $\chi = 1/e$, στο $\chi = e$ και στο $\chi = 0$

$$\bullet \text{ Έχω } \lim_{\chi \rightarrow 1/e} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1/e} \frac{\chi^2 - e\chi}{\ln^2 \chi - 1} \stackrel{\frac{\alpha}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1/e} \frac{\chi^2 - e\chi}{\ln \chi - 1} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1/e} \frac{1}{\ln \chi + 1} \quad (1) \quad \text{Όμως}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1/e} \frac{\chi^2 - e\chi}{\ln \chi - 1} = \frac{e^{-2} - 1}{2} \quad \text{και} \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{\chi \rightarrow \frac{1}{e}^-} \frac{1}{\ln \chi + 1} \stackrel{\ln \chi + 1 < 0}{=} -\infty \text{ άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(\chi) = \frac{e^{-2} - 1}{2} \cdot (-\infty) = +\infty \\ \lim_{\chi \rightarrow \frac{1}{e}^+} \frac{1}{\ln \chi + 1} \stackrel{\ln \chi + 1 > 0}{=} +\infty \text{ άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(\chi) = \frac{e^{-2} - 1}{2} \cdot (+\infty) = -\infty \end{array} \right.$$

Άρα η ευθεία $\chi = 1/e$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$$\bullet \text{ Έχω } \lim_{\chi \rightarrow e} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow e} \frac{\chi^2 - e\chi}{\ln^2 \chi - 1} \stackrel{\begin{smallmatrix} \text{μορφή } \frac{0}{0} \text{ εφαρμόζω} \\ \text{κανόνα De L'Hospital} \end{smallmatrix}}{=} \lim_{\chi \rightarrow e} \frac{(\chi^2 - e\chi)'}{(\ln^2 \chi - 1)'} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow e} \frac{2\chi - e}{2\ln \chi} = \lim_{\chi \rightarrow e} \frac{2\chi^2 - e\chi}{2\ln \chi} = \frac{e^2}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{ Έχω } \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi^2 - e\chi}{\ln^2 \chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi^2 - e\chi) \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1}{\ln^2 \chi - 1} = 0 \cdot \frac{1}{+\infty} = 0 \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

Π.Χ. 2) Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+1}-2x+3}{x-1} & \text{(ii)} \quad f(x) &= \sqrt{x^2+x}+x+3 \\ \text{(iii)} \quad f(x) &= \frac{2x+\sqrt{x-2}}{x-3} & \text{(iv)} \quad f(x) &= \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{x-1} & \text{(v)} \quad f(x) &= \frac{x+x^2 \cdot \eta\mu x}{x^3+\sqrt{x+2}} \end{aligned}$$

Λύση

(i) Επειδή $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$, θα αναζητήσω οριζόντια ασύμπτωτη και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{Έχω } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-2x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}-2x+3}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}-2x+3}{x-1} \stackrel{\substack{\text{για } x \rightarrow -\infty \\ \text{έχω } x < 0 \\ \text{άρα } |x| = -x}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+1/x^2}-2x+3}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-\sqrt{1+1/x^2}-2+3/x)}{x(1-1/x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+1/x^2}-2+3/x}{1-1/x} = -3 \end{aligned}$$

Άρα η $y = -3$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\begin{aligned} \text{Έχω } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-2x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}-2x+3}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}-2x+3}{x-1} \stackrel{\substack{\text{για } x \rightarrow +\infty \\ \text{έχω } x > 0 \\ \text{άρα } |x| = x}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+1/x^2}-2x+3}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{1+1/x^2}-2+3/x)}{x(1-1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+1/x^2}-2+3/x}{1-1/x} = -1 \end{aligned}$$

Άρα η $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

(ii) Επειδή $A_f = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$, θα αναζητήσω οριζόντια ασύμπτωτη και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x}+x+3) =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x}+x+3) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|\sqrt{1+1/x}+x+3) \stackrel{\substack{\text{για } x \rightarrow -\infty \\ \text{έχω } x < 0 \\ \text{άρα } |x| = -x}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x\sqrt{1+1/x}+x+3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x\left(-\sqrt{1+1/x}+1+3/x\right) \right] = (-\infty) \cdot 0 = \text{απροσδιοριστία} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{\chi^2 + \chi} + \chi + 3) \cdot (\sqrt{\chi^2 + \chi} - \chi - 3)}{\sqrt{\chi^2 + \chi} - \chi - 3} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{\chi^2 + \chi})^2 - (\chi + 3)^2}{\sqrt{\chi^2 + \chi} - \chi - 3} = \\
&\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^2 + \chi - \chi^2 - 6\chi - 9}{\sqrt{\chi^2 + \chi} - \chi - 3} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-5\chi - 9}{\sqrt{\chi^2(1+1/\chi)} - \chi - 3} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-5\chi - 9}{|x|\sqrt{1+1/x} - \chi - 3} \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow -\infty \\ \text{έχω } \chi < 0 \\ \text{άρα } |x| = -\chi}}{=} \\
&\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-5\chi - 9}{-\chi\sqrt{1+1/\chi} - \chi - 3} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi(-5-9/\chi)}{\chi(-\sqrt{1+1/\chi} - 1 - 3/\chi)} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Άρα η $y = \frac{5}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\begin{aligned}
\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\sqrt{\chi^2(1+1/\chi)} + \chi + 3) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (|x|\sqrt{1+1/\chi} + \chi + 3) \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow +\infty \\ \text{έχω } \chi > 0 \\ \text{άρα } |x| = \chi}}{=} \\
&\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi\sqrt{1+1/\chi} + \chi + 3) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [\chi(\sqrt{1+1/\chi} + 1 + 3/\chi)] = (+\infty) \cdot 2 = +\infty
\end{aligned}$$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

(iii) Επειδή $A_f = [2, 3) \cup (3, +\infty)$, θα αναζητήσω οριζόντια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$

$$\begin{aligned}
\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2\chi + \sqrt{\chi^2 - 2}}{\chi - 3} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2\chi + \sqrt{\chi(1 - 2/\chi)}}{\chi - 3} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2\chi + \chi^{1/2}\sqrt{1 - 2/\chi}}{\chi - 3} = \\
&\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi \left(2 + \frac{1}{\chi^{1/2}} \sqrt{1 - 2/\chi} \right)}{\chi(1 - 3/\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\chi^{1/2}} \sqrt{1 - 2/\chi}}{1 - 3/\chi} = 2
\end{aligned}$$

Άρα η $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

(iv) Επειδή $A_f = \mathbb{R} - \{1\}$, θα αναζητήσω οριζόντια ασύμπτωτη και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$$\begin{aligned}
\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) &= \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 + 2}}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi + \sqrt{\chi^2(1 + 2/\chi^2)}}{\chi - 1} = \\
&\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi + |x|\sqrt{1 + 2/\chi^2}}{\chi - 1} \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow -\infty \\ \text{έχω } \chi < 0 \\ \text{άρα } |x| = -\chi}}{=} \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi - \chi\sqrt{1 + 2/\chi^2}}{\chi(1 - 1/\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi(1 - \sqrt{1 + 2/\chi^2})}{\chi(1 - 1/\chi)} = \\
&\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + 2/\chi^2}}{1 - 1/\chi} = 0
\end{aligned}$$

Άρα η $y = 0$ (δηλ. ο άξονας $\chi'\chi$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\begin{aligned}
 \text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 + 2}}{\chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 (1 + 2/\chi^2)}}{\chi - 1} = \\
 \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi + \chi \sqrt{1 + 2/\chi^2}}{\chi - 1} &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi + \chi \sqrt{1 + 2/\chi^2}}{\chi(1 - 1/\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi(1 + \sqrt{1 + 2/\chi^2})}{\chi(1 - 1/\chi)} = \\
 \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + 2/\chi^2}}{1 - 1/\chi} &= 2
 \end{aligned}$$

Άρα η $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

(v) Επειδή $A_f = [0, +\infty)$, θα αναζητήσω οριζόντια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi + \chi^2 \cdot \eta\mu\chi}{\chi^3 + \sqrt{\chi} + 2} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^3 \left(\frac{1}{\chi^2} + \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \right)}{\chi^3 \left(1 + \frac{1}{\chi^{5/2}} + \frac{2}{\chi^3} \right)} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\chi^2} + \frac{\eta\mu\chi}{\chi}}{1 + \frac{1}{\chi^{5/2}} + \frac{2}{\chi^3}} = (1)$$

Θυμηθείτε από τις μορφές ορίων ότι στην περίπτωση $\lim_{\chi \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\text{πολυωνυμική παράσταση του } \chi}{\text{στην οποία υπάρχουν } \eta\mu\chi \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\chi} \right)$ αν ο παρονομαστής έχει μεγαλύτερο εκθέτη βγάζω κοινό παράγοντα και από αριθμητή και από παρονομαστή τη μεγαλύτερη δύναμη που έχει το χ στον παρονομαστή

$$\text{Έχω } \left| \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \right| = \frac{|\eta\mu\chi|}{|\chi|} \leq \frac{1}{|\chi|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|\chi|} \leq \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \leq \frac{1}{|\chi|}$$

$$\text{και } \begin{cases} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|\chi|} \right) = 0 \\ \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\chi|} = 0 \end{cases}$$

Θυμηθείτε από τις μορφές ορίων ότι όταν παρουσιάζεται η απροσδιοριστία $\eta\mu(\pm\infty)$ ή $\sigma\upsilon\nu(\pm\infty)$ τότε την αντιμετωπίζουμε με το κριτήριο παρεμβολής.

Τι ακριβώς κάνουμε;

Γρήγορα επανάληψη στις μορφές ορίων !

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα έχω $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\chi}{\chi} = 0$

$$\text{Ακόμα } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\chi^{5/2}} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2}{\chi^3} = 0 \quad \text{Άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = 0$$

Άρα η $y = 0$ (δηλ. ο άξονας $\chi'\chi$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

π.χ 3) Να βρεθούν οι πλάγιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{(i) } f(\chi) = \frac{\chi^3 - 2\chi^2 + 3}{\chi^2 + 5} \quad \text{(ii) } f(\chi) = \frac{2\chi^2 - \sqrt{\chi^2 + 3}\chi - 4}{\chi + 2} \quad \text{(iii) } f(\chi) = \chi^{\chi} \quad \text{(iv) } f(\chi) = \frac{\chi^2 - \sqrt{\chi^3 + \chi}}{\chi}$$

Λύση

(i) Επειδή $A_f = \mathbb{R}$, θα αναζητήσω πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\chi^3 - 2\chi^2 + 3}{\chi^2 + 5}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^3 - 2\chi^2 + 3}{\chi^3 + 5\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^3 - 2\chi^2 + 3}{\chi^3 + 5\chi} = 1$$

$$\text{και } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (f(\chi) - 1 \cdot \chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\frac{\chi^3 - 2\chi^2 + 3}{\chi^2 + 5} - \chi \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^3 - 2\chi^2 + 3 - \chi^3 - 5\chi}{\chi^2 + 5} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{2\chi^2 - 5\chi + 3}{\chi^2 + 5} = 2$$

Άρα η $y = \chi + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\text{Όμοια έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 1 \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 1 \cdot \chi) = 2$$

Άρα η $y = \chi + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$

(ii) Επειδή $A_f = (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$, θα αναζητήσω πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2\chi^2 - \sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\chi + 2}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{2\chi^2 - \sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\chi^2 + 2\chi} = \dots = 2$$

$$\text{και } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (f(\chi) - 2 \cdot \chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\frac{2\chi^2 - \sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\chi + 2} - 2\chi \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\frac{2\chi^2 - \sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4} - 2\chi^2 - 4\chi}{\chi + 2} \right) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4} - 4\chi}{\chi + 2} = \dots = -3$$

Άρα η $y = 2\chi - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\chi^2 - \sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\chi + 2}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2\chi^2 - \sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\chi^2 + 2\chi} = \dots = 2$$

$$\text{και } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 2 \cdot \chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\chi^2 - \sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\chi + 2} - 2\chi \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\chi^2 - \sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4} - 2\chi^2 - 4\chi}{\chi + 2} \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{\chi^2 + 3\chi - 4} - 4\chi}{\chi + 2} = \dots = -5$$

Άρα η $y = 2\chi - 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

(iii) Επειδή $A_f = (0, +\infty)$, θα αναζητήσω πλάγια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^\chi}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi^{\chi-1} \stackrel{(+\infty)^{(+\infty)}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} e^{(\chi-1) \ln \chi} \quad (2)$$

$$\Theta \alpha \text{ υπολογίσω το } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} ((\chi-1) \cdot \ln \chi) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\Theta \acute{\epsilon}\tau\omega \text{ στην } (2) \text{ όπου } (\chi-1) \cdot \ln \chi = u$$

$$\text{Έχω ότι για } \chi \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty, \quad \acute{\alpha}\rho\alpha (2) \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη

(iv) Επειδή $A_f = (0, +\infty)$, θα αναζητήσω πλάγια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$

Έχω

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 - \sqrt{\chi^3 + \chi}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 - \sqrt{\chi^3 + \chi}}{\chi^2} = \dots = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 \left(1 - \frac{1}{\chi^{1/2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\chi^2}} \right)}{\chi^2} = 1$$

$$\kappa\alpha\iota \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 1 \cdot \chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\chi^2 - \sqrt{\chi^3 + \chi}}{\chi} - \chi \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{\chi^3 + \chi}}{\chi} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{-\chi^{3/2} \sqrt{1 + 1/\chi^2}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(-\chi^{1/2} \sqrt{1 + 1/\chi^2} \right) = -\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη

π.χ. 4) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(i) f(\chi) = \frac{\chi^4 + \chi}{\chi^2 - 1}$$

$$(ii) f(\chi) = \sqrt{\chi^2 + \chi - 2} + \chi + 1$$

$$(iii) f(\chi) = \frac{\sqrt{\chi^3 - 1} + \chi - 2\sqrt{\chi^2 - 1} - 1}{\chi - 1}$$

$$(iv) f(\chi) = \sqrt[3]{\chi^3 - 8} + 2\sqrt{\chi^2 - \chi} - 3\chi$$

$$(v) f(\chi) = \frac{\sqrt[3]{\chi} + \sqrt{2 - \chi^2} - 2\chi}{\chi^2 - 1}$$

$$(vi) f(\chi) = \frac{e^\chi - 1}{\chi^2 - 4\chi}$$

$$(vii) f(\chi) = \frac{5^{\chi+1} + 2^{2\chi} \eta \mu \chi - 3^\chi}{e^\chi - 5^\chi}$$

Λύση

(i) Επειδή $A_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, θα αναζητήσω κατακόρυφη ασύμπτωτη στις θέσεις $\chi = 1$ και

$\chi = -1$ και οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Η f είναι συνεχής ως ρητή άρα $\forall \chi_0 \in A_f$ έχω $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = f(\chi_0) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& \bullet \quad \text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1} \frac{\chi^4 + \chi}{\chi^2 - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow -1} \frac{\chi(\chi+1)(\chi^2 - \chi + 1)}{(\chi-1)(\chi+1)} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R} \\
& \bullet \quad \lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^4 + \chi}{\chi^2 - 1} \stackrel{\frac{\alpha}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^4 + \chi}{(\chi+1)} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1}{(\chi-1)} \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\text{Όμως } \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^4 + \chi}{(\chi+1)} = 1 \text{ και } \begin{cases} \lim_{\chi \rightarrow 1^-} \frac{1}{(\chi-1)} \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow 1^- \\ \text{είναι } \chi-1 < 0}}{=} -\infty \text{ άρα (1)} \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow 1^-} f(\chi) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty \\ \lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{1}{(\chi-1)} \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow 1^+ \\ \text{είναι } \chi-1 > 0}}{=} +\infty \text{ άρα (1)} \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow 1^+} f(\chi) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty \end{cases}$$

Άρα η ευθεία $\chi = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Επειδή η f είναι ρητή με βαθμό του αριθμητή κατά δύο μονάδες μεγαλύτερο από το βαθμό του παρονομαστή δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ας το δούμε για να μας φύγει η περιέργεια. Έχω} \\ \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\chi^4 + \chi}{\chi^2 - 1}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^4 + \chi}{\chi^3 - \chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^4 + \chi}{\chi^3 - \chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^4}{\chi^3} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \chi = -\infty \\ \text{και } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^4 + \chi}{\chi^2 - 1} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^4}{\chi^2} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \chi^2 = +\infty \text{ Αντίστοιχα για το } +\infty \end{array} \right)$$

(ii) Επειδή $A_f = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$, θα αναζητήσω οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} + \chi + 1 \right) =$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\chi^2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} - \frac{2}{\chi^2}\right)} + \chi + 1 \right) \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow -\infty \text{ έχω} \\ \chi < 0 \text{ άρα } |\chi| = -\chi}}{=} \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(|\chi| \sqrt{1 + \frac{1}{\chi} - \frac{2}{\chi^2}} + \chi + 1 \right) \\
& \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(-\chi \sqrt{1 + \frac{1}{\chi} - \frac{2}{\chi^2}} + \chi + 1 \right) \stackrel{\text{απροσδιορίστη}}{=} \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[\chi \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{\chi} - \frac{2}{\chi^2}} + \chi + 1 \right) \right] \stackrel{\text{απροσδιορίστη}}{=} (-\infty) : 0
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} + \chi + 1 \right) \left(\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} - \chi - 1 \right)}{\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} - \chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^2 + \chi - 2 - (\chi + 1)^2}{\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} - \chi - 1} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi^2 + \chi - 2 - \chi^2 - 2\chi - 1}{\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} - \chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-\chi - 3}{\sqrt{\chi^2 \left(1 + \frac{1}{\chi} - \frac{2}{\chi^2} \right)} - \chi - 1} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-\chi - 3}{|\chi| \sqrt{1 + \frac{1}{\chi} - \frac{2}{\chi^2}} - \chi - 1} \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow -\infty \text{ έχω} \\ \chi < 0 \text{ άρα } |\chi| = -\chi}}{=} \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-\chi - 3}{-\chi \sqrt{1 + \frac{1}{\chi} - \frac{2}{\chi^2}} - \chi - 1} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi(-1-3/\chi)}{-\chi(\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2}+1+1/\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{-1-3/\chi}{-(\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2}+1+1/\chi)} = \frac{1}{2}$$

Άρα η $y = \frac{1}{2}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Έχω

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} + \chi + 1) = \dots = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\chi(\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2}+1+1/\chi) \right] = (+\infty) \cdot 2 = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Θα αναζητήσω πλάγια ασύμπτωτη της C_f μόνο στο $+\infty$, αφού βρήκα ότι στο $-\infty$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη

$$\begin{aligned} \text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} + \chi + 1}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\chi^2(1+1/\chi-2/\chi^2)} + \chi + 1}{\chi} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{|\chi|\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2} + \chi + 1}{\chi} \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow +\infty \text{ έχω} \\ \chi > 0 \text{ άρα } |\chi| = \chi}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2} + \chi + 1}{\chi} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi(\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2}+1+1/\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2}+1+1/\chi) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{και } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 2\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} - \chi + 1) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\sqrt{\chi^2(1+1/\chi-2/\chi^2)} - \chi + 1) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (|\chi|\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2} - \chi + 1) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [\chi(\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2} - 1 + 1/\chi)] = (+\infty) \cdot 0 \text{ απροσδιόριστο}$$

$$= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} - \chi + 1)(\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} + \chi - 1)}{\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} + \chi - 1} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 + \chi - 2 - (\chi + 1)^2}{\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} + \chi - 1} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi^2 + \chi - 2 - \chi^2 - 2\chi - 1}{\sqrt{\chi^2 + \chi - 2} + \chi - 1} = \dots = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi(-1-3/\chi)}{\chi(\sqrt{1+1/\chi-2/\chi^2}+1+1/\chi)} = \dots = -\frac{1}{2}$$

Άρα η $y = 2\chi - \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

- (iii) Επειδή $A_f = (1, +\infty)$, θα αναζητήσω κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $\chi = 1$ και οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Η f είναι συνεχής ως πηλίκo συνεχών άρα $\forall \chi_0 \in A_f$ έχω $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = f(\chi_0) \in \mathbb{R}$

• Έχω $\lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{\chi^3-1} + \chi - 2\sqrt{\chi^2-1} - 1}{\chi-1}$ $\frac{0}{0}$
αόριστο και ορίζεται
DE L'HOSPITAL

$$= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{\chi^3-1} + \chi - 2\sqrt{\chi^2-1} - 1)'}{(\chi-1)'} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{\chi^2}{\sqrt[3]{(\chi^3-1)^2}} + 1 - \frac{2\chi}{\sqrt{\chi^2-1}}}{1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \left(\frac{\chi^2}{\sqrt[3]{(\chi^3-1)^2}} - \frac{2\chi}{\sqrt{\chi^2-1}} + 1 \right) \quad (1)$$

Όμως $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^2}{\sqrt[3]{(\chi^3-1)^2}} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \chi^2 \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(\chi^3-1)^2}} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$ και

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2\chi}{\sqrt{\chi^2-1}} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{2\chi}{\sqrt{\chi+1}} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{\chi-1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot (+\infty) = +\infty$$

Άρα $(1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = (+\infty + 1 - 2(+\infty)) = +\infty - \infty$ απροσδιόριστο

$$\begin{aligned} \text{Έχω : } \lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{\chi^3-1} + \chi - 2\sqrt{\chi^2-1} - 1}{\chi-1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)} - 2\sqrt{(\chi-1)(\chi+1)} + \chi-1}{\chi-1} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{\chi-1} \sqrt[3]{\chi^2+\chi+1} - 2\sqrt{\chi-1} \sqrt{\chi+1} + \chi-1}{\chi-1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi-1)^{1/3} \sqrt[3]{\chi^2+\chi+1} - 2(\chi-1)^{1/2} \sqrt{\chi+1} + (\chi-1)}{\chi-1} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi-1)^{1/3} \left(\sqrt[3]{\chi^2+\chi+1} - 2(\chi-1)^{1/6} \sqrt{\chi+1} + (\chi-1)^{2/3} \right)}{\chi-1} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{\chi^2+\chi+1} - 2(\chi-1)^{1/6} \sqrt{\chi+1} + (\chi-1)^{2/3}}{(\chi-1)^{2/3}} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(\chi-1)^2}} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 1} \left(\sqrt[3]{\chi^2+\chi+1} - 2(\chi-1)^{1/6} \sqrt{\chi+1} + (\chi-1)^{2/3} \right) = (+\infty) \cdot \sqrt[3]{3} = (+\infty) \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $\chi = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Αναζητώ την οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{Έχω : } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\chi^3-1} + \chi - 2\sqrt{\chi^2-1} - 1}{\chi-1} = \dots = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi \sqrt[3]{1-1/\chi^3} - 2\chi \sqrt{1-1/\chi^2} + \chi-1}{\chi-1} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi \left(\sqrt[3]{1-1/\chi^3} - 2\sqrt{1-1/\chi^2} + 1 - 1/\chi \right)}{\chi(1-1/\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1-1/\chi^3} - 2\sqrt{1-1/\chi^2} + 1 - 1/\chi}{1-1/\chi} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (δηλ. ο άξονας $\chi'\chi$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f

(iv) Επειδή $A_f = [2, +\infty)$, θα αναζητήσω μόνο οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} + 2\sqrt{\chi^2 - \chi - 3\chi} \right) = \quad (1)$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} + 2\sqrt{\chi^2 - \chi - 3\chi} \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\chi^3 \left(1 - \frac{8}{\chi^3} \right)} + 2\sqrt{\chi^2 \left(1 - \frac{1}{\chi} - 3 \right)} \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\chi^3} \sqrt[3]{1 - \frac{8}{\chi^3}} + 2\sqrt{\chi^2} \sqrt{1 - \frac{1}{\chi} - 3} \right) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\chi \left(\sqrt[3]{1 - \frac{8}{\chi^3}} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{\chi} - 3} \right) \right] =$$

Προσθαφαιρώντας το χ , σε ισοδύναμο εκθέτη με την μεγαλύτερη δύναμη που έχει στο κάθε ριζικό, παρουσιάζεται γνωστής μορφής απροσδιοριστία $(\pm\infty) \cdot 0$ απροσδιοριστία (κοίτα μεθοδολογίες ορίων)

$$(1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} - \chi + \chi + 2\sqrt{\chi^2 - \chi} - 2\chi + 2\chi - 3\chi \right) =$$

$$= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} - \chi \right) \cdot \left(\left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} \right)^2 + \chi \sqrt[3]{\chi^3 - 8} + \chi^2 \right)}{\left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} \right)^2 + \chi \sqrt[3]{\chi^3 - 8} + \chi^2} + 2 \frac{\left(\sqrt{\chi^2 - \chi} - \chi \right) \cdot \left(\sqrt{\chi^2 - \chi} + \chi \right)}{\sqrt{\chi^2 - \chi} + \chi} \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} \right)^3 - \chi^3}{\left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} \right)^2 + \chi \sqrt[3]{\chi^3 - 8} + \chi^2} + 2 \frac{\left(\sqrt{\chi^2 - \chi} \right)^2 - \chi^2}{\sqrt{\chi^2 - \chi} + \chi} \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{\left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} \right)^3 - \chi^3}{\left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} \right)^2 + \chi \sqrt[3]{\chi^3 - 8} + \chi^2} + 2 \frac{\left(\sqrt{\chi^2 - \chi} \right)^2 - \chi^2}{\sqrt{\chi^2 - \chi} + \chi} \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{-8}{\left(\sqrt[3]{\chi^3 - 8} \right)^2 + \chi \sqrt[3]{\chi^3 - 8} + \chi^2} + 2 \frac{-\chi}{\sqrt{\chi^2 - \chi} + \chi} \right) = \dots = -1$$

Άρα η $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

(v) Επειδή $A_f = [0, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$, θα αναζητήσω κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $\chi = 1$

Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών άρα $\forall \chi_0 \in A_f$ έχω $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = f(\chi_0) \in \mathbb{R}$

$$\text{Έχω: } \lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{\chi} + \sqrt{2 - \chi^2} - 2\chi}{\chi^2 - 1} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\left(\sqrt[3]{\chi} + \sqrt{2 - \chi^2} - 2\chi \right)'}{(\chi^2 - 1)'} =$$

$$\stackrel{\text{εφαρμοζω κανόνα DE L' HOSPITAL}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{\chi^2}} - \frac{\chi}{\sqrt{2 - \chi^2}} - 2}{2\chi} = -\frac{4}{3}$$

Άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

Β' τρόπος Έχω $\lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\chi} + \sqrt{2 - \chi^2} - 2\chi}{\chi^2 - 1} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\chi} - 1 + 1 + \sqrt{2 - \chi^2} - 1 + 1 - 2\chi}{\chi^2 - 1} =$

$$= \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{(\sqrt{\chi} - 1)((\sqrt{\chi})^2 + \sqrt{\chi} + 1)}{(\sqrt{\chi})^2 + \sqrt{\chi} + 1} + \frac{(\sqrt{2 - \chi^2} - 1)((\sqrt{2 - \chi^2} + 1))}{\sqrt{2 - \chi^2} + 1} + 2 - 2\chi}{\chi^2 - 1} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{(\sqrt{\chi})^3 - 1}{(\sqrt{\chi})^2 + \sqrt{\chi} + 1} + \frac{(\sqrt{2 - \chi^2})^2 - 1}{\sqrt{2 - \chi^2} + 1} + 2(1 - \chi)}{(\chi - 1)(\chi + 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{\chi - 1}{(\sqrt{\chi})^2 + \sqrt{\chi} + 1} + \frac{1 - \chi^2}{\sqrt{2 - \chi^2} + 1} - 2(\chi - 1)}{(\chi - 1)(\chi + 1)} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{(\chi - 1) \left(\frac{1}{(\sqrt{\chi})^2 + \sqrt{\chi} + 1} - \frac{1 + \chi}{\sqrt{2 - \chi^2} + 1} - 2 \right)}{(\chi - 1)(\chi + 1)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{(\sqrt{\chi})^2 + \sqrt{\chi} + 1} - \frac{1 + \chi}{\sqrt{2 - \chi^2} + 1} - 2}{\chi + 1} = -\frac{4}{3}$$

(vi) Επειδή $A_f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$, θα αναζητήσω κατακόρυφη ασύμπτωτη στα $\chi = 0$, $\chi = 4$ και οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών άρα $\forall \chi_0 \in A_f$ έχω $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = f(\chi_0) \in \mathbb{R}$

Έχω: $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{e^\chi - 1}{\chi^2 - 4\chi} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(e^\chi - 1)'}{(\chi^2 - 4\chi)'} \stackrel{\text{εφαρμογή κανόνα DE L'HOSPITAL}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{e^\chi}{2\chi - 4} = -\frac{1}{4}$

$$\lim_{\chi \rightarrow 4} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{e^\chi - 1}{\chi^2 - 4\chi} \stackrel{\frac{\infty}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{e^\chi - 1}{\chi} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{1}{\chi - 4} = \quad (1)$$

Όμως $\lim_{\chi \rightarrow 4} \frac{e^\chi - 1}{\chi} = \frac{e^4 - 1}{4}$ και $\left| \begin{array}{l} \lim_{\chi \rightarrow 4^-} \frac{1}{\chi - 4} = -\infty \text{ άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow 4^-} f(\chi) = \frac{e^4 - 1}{4} \cdot (-\infty) = -\infty \\ \lim_{\chi \rightarrow 4^+} \frac{1}{\chi - 4} = +\infty \text{ άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow 4^+} f(\chi) = \frac{e^4 - 1}{4} \cdot (+\infty) = +\infty \end{array} \right.$

Άρα η ευθεία $\chi = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Αναζητώ την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Έχω $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^\chi - 1}{\chi^2 - 4\chi} = \quad (1)$

Όμως $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (e^\chi - 1) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\chi^2 - 4\chi) = +\infty$ (θυμηθείτε ότι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \alpha^\chi = +\infty$ (αν $\alpha > 1$)
 $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \alpha^\chi = 0$ (αν $\alpha \in (0, 1)$))

Άρα (1) $\Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^\chi - 1}{\chi^2 - 4\chi} \stackrel{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(e^\chi - 1)'}{(\chi^2 - 4\chi)'} \stackrel{\text{εφαρμογή κανόνα DE L'HOSPITAL}}{=}$

$$= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^{\chi}}{2\chi - 4} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{εφαρμοζών κανόνα} \\ \text{DE L' HOSPITAL}}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\chi})'}{(2\chi - 4)'} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^{\chi}}{2} = +\infty$$

Άρα **δεν έχει** οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{e^{\chi} - 1}{\chi^2 - 4\chi} = \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (e^{\chi} - 1) = -1 \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (\chi^2 - 4\chi) = +\infty \quad \left(\begin{array}{l} \text{θυμηθείτε ότι } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \alpha^{\chi} = 0 \text{ (αν } \alpha > 1) \\ \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \alpha^{\chi} = +\infty \text{ (αν } \alpha \in (0,1)) \end{array} \right)$$

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (e^{\chi} - 1) \cdot \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{1}{\chi^2 - 4\chi} = -1 \cdot 0 = 0$$

Άρα η $y = 0$ (δηλ. ο άξονας $\chi'\chi$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Αναζητώ την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\text{Έχω: } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{\chi} - 1}{\chi^2 - 4\chi}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{e^{\chi} - 1}{\chi^3 - 4\chi^2} = (\text{εργαζόμενοι όπως στην (1) καταλήγουμε}) = +\infty$$

Άρα η C_f **δεν έχει** ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

(vii) Επειδή $A_f = \mathbb{R}^*$, θα αναζητήσω κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $\chi = 0$ και οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Η f είναι συνεχής ως πηλίκo συνεχών άρα $\forall \chi_0 \in A_f$ έχω $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = f(\chi_0) \in \mathbb{R}$

$$\text{Έχω: } \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{5^{\chi+1} + 2^{2\chi} \eta \mu \chi - 3^{\chi}}{e^{\chi} - 5^{\chi}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 0} (5^{\chi+1} + 2^{2\chi} \eta \mu \chi - 3^{\chi}) \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1}{e^{\chi} - 5^{\chi}} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lim_{\chi \rightarrow 0} (5^{\chi+1} + 2^{2\chi} \eta \mu \chi - 3^{\chi}) = 4 \text{ και}$$

$e^{\chi} - 5^{\chi} > 0$ για $\chi \in (-\infty, 0)$ ενώ $e^{\chi} - 5^{\chi} < 0$ για $\chi \in (0, +\infty)$ οπότε

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{\chi \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{\chi} - 5^{\chi}} = +\infty \text{ άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow 0^-} f(\chi) = 4 \cdot (+\infty) = +\infty \\ \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\chi} - 5^{\chi}} = -\infty \text{ άρα } (1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow 0^+} f(\chi) = 4 \cdot (-\infty) = -\infty \end{array} \right.$$

Άρα η ευθεία $\chi = 0$ (δηλ. ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Αναζητώ την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{5^{\chi+1} + 2^{2\chi} \eta \mu \chi - 3^{\chi}}{e^{\chi} - 5^{\chi}} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{5 \cdot 5^{\chi} + 4^{\chi} \eta \mu \chi - 3^{\chi}}{e^{\chi} - 5^{\chi}} =$$

Θυμηθείτε ότι:

Στις παραστάσεις που παρουσιάζεται a^{∞} πρώτα παρουσιάζω, στους εκθέτες των εκθετικών συναρτήσεων, την ίδια παράσταση του χ και μετά, αν έχω $\chi \rightarrow +\infty$ βγάζω κοινό παράγοντα (από αριθμητή - (παρονομαστή)) την εκθετική με τη μεγαλύτερη βάση, ενώ αν έχω $\chi \rightarrow -\infty$ βγάζω κοινό παράγοντα (από αριθμητή - (παρονομαστή)) την εκθετική με τη μικρότερη βάση. (κοίτα μεθόδους ορίων)

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{3^\chi \cdot \left(5 \cdot \left(\frac{5}{3} \right)^\chi + \left(\frac{4}{3} \right)^\chi \eta\mu\chi - 1 \right)}{e^\chi \left[1 - \left(\frac{5}{e} \right)^\chi \right]} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{e} \right)^\chi \cdot \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{5 \cdot \left(\frac{5}{3} \right)^\chi + \left(\frac{4}{3} \right)^\chi \eta\mu\chi - 1}{1 - \left(\frac{5}{e} \right)^\chi} = \quad (1)$$

Όμως $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{e} \right)^\chi = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{3} \right)^\chi = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{e} \right)^\chi = 0$ (αφού $\frac{3}{e}, \frac{5}{3}, \frac{5}{e} > 1$) και

$$\left| \left(\frac{4}{3} \right)^\chi \eta\mu\chi \right| \leq \left(\frac{4}{3} \right)^\chi \Leftrightarrow -\left(\frac{4}{3} \right)^\chi \leq \left(\frac{4}{3} \right)^\chi \eta\mu\chi \leq \left(\frac{4}{3} \right)^\chi$$

και επειδή $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^\chi = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[-\left(\frac{4}{3} \right)^\chi \right] = 0$ από κριτήριο παρεμβολής θα

έχω $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{4}{3} \right)^\chi \eta\mu\chi \right] = 0$ Άρα $(1) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = 0 \cdot \frac{5 \cdot 0 + 0 - 1}{1 - 0} = 0$

Άρα η $y = 0$ (δηλ. ο άξονας $\chi'\chi$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Αναζητώ την οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\begin{aligned} \text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{5^{\chi+1} + 2^{2\chi} \eta\mu\chi - 3^\chi}{e^\chi - 5^\chi} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 5^\chi + 4^\chi \eta\mu\chi - 3^\chi}{e^\chi - 5^\chi} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{5^\chi \cdot \left(5 + \left(\frac{4}{5} \right)^\chi \eta\mu\chi - \left(\frac{3}{5} \right)^\chi \right)}{5^\chi \left[\left(\frac{e}{5} \right)^\chi - 1 \right]} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{5 + \left(\frac{4}{5} \right)^\chi \eta\mu\chi - \left(\frac{3}{5} \right)^\chi}{\left(\frac{e}{5} \right)^\chi - 1} = \quad (2) \end{aligned}$$

Όμως $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^\chi = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{5} \right)^\chi = 0$ (αφού $0 < \frac{2}{5}, \frac{e}{5} < 1$) και

$$\left| \left(\frac{4}{5} \right)^\chi \eta\mu\chi \right| \leq \left(\frac{4}{5} \right)^\chi \Leftrightarrow -\left(\frac{4}{5} \right)^\chi \leq \left(\frac{4}{5} \right)^\chi \eta\mu\chi \leq \left(\frac{4}{5} \right)^\chi$$

και επειδή $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5} \right)^\chi = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{4}{5} \right)^\chi \right] = 0$ από κριτήριο παρεμβολής θα έχω

$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{4}{5} \right)^\chi \eta\mu\chi \right] = 0$ Άρα $(2) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \frac{5 + 0 - 0}{0 - 1} = -5$

Άρα η $y = -5$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Π.Χ. 5) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να μην έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη το

$$\text{γράφημα της } f(\chi) = \frac{\chi^4 + \alpha\chi^2 + \beta\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}}$$

Λύση

Επειδή $A_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, αν η C_f είχε κατακόρυφη ασύμπτωτη, αυτή θα ήταν η $\chi = 1$ ή η $\chi = -1$. Άρα για να μην έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη θα πρέπει να ισχύουν:

$$(α) \lim_{\chi \rightarrow -1} f(\chi) = l \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad (β) \lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = \kappa \in \mathbb{R}$$

$$\text{Έχω: } f(\chi) = \frac{\chi^4 + \alpha\chi^2 + \beta\chi}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \Rightarrow \chi^4 + \alpha\chi^2 + \beta\chi = f(\chi) \cdot \sqrt{\chi^2 - 1}$$

$$\text{Άρα } \lim_{\chi \rightarrow -1} (\chi^4 + \alpha\chi^2 + \beta\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1} (f(\chi) \cdot \sqrt{\chi^2 - 1}) \stackrel{(α)}{\Rightarrow} 1 + \alpha - \beta = l \cdot 0 \Rightarrow \alpha - \beta = -1 \quad (1)$$

$$\text{και } \lim_{\chi \rightarrow 1} (\chi^4 + \alpha\chi^2 + \beta\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} (f(\chi) \cdot \sqrt{\chi^2 - 1}) \stackrel{(β)}{\Rightarrow} 1 + \alpha + \beta = \kappa \cdot 0 \Rightarrow \alpha + \beta = -1 \quad (2)$$

Από τη λύση του συστήματος των (1) και (2) έχω $\alpha = -1$ και $\beta = 0$

$$\text{Πράγματι για } (\alpha, \beta) = (-1, 0) \quad \text{έχω} \quad f(\chi) = \frac{\chi^4 - \chi^2}{\sqrt{\chi^2 - 1}} \quad \text{οπότε}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -1} \frac{\chi^4 - \chi^2}{\sqrt{\chi^2 - 1}} = \dots = 0 \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{\chi \rightarrow 1} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{\chi^4 - \chi^2}{\sqrt{\chi^2 - 1}} = \dots = 0 \in \mathbb{R}$$

Π x 6) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(\chi) = \frac{\sqrt{\alpha\chi^2 - \chi} - 3\chi + \beta}{\chi}$ να έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 3\chi - 1$

Λύση

Παρατηρώ ότι αν $\alpha \leq 0$ τότε ο περιορισμός $\alpha\chi^2 - \chi \geq 0$ (απαραίτητος για την εύρεση του Πεδίου Ορισμού) δεν θα αληθεύει σε διάστημα της μορφής $(\lambda, +\infty)$, άρα η C_f δεν θα μπορεί να έχει την ευθεία $y = 3\chi - 1$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Άρα θα πρέπει $\alpha > 0$ (1)

α τρόπος

Αφού η $y = 3\chi - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ θα ισχύουν:

$$\begin{aligned} (α) \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 3 &\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\alpha\chi^2 - \chi} - 3\chi + \beta}{\chi} = 3 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{\chi^2 \left(\alpha - \frac{1}{\chi} \right)} - 3\chi + \beta \right)}{\chi} = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\left| \chi \right| \sqrt{\alpha - \frac{1}{\chi}} - 3\chi + \beta}{\chi} = 3 \quad \begin{matrix} \gamma \text{ για } \chi \rightarrow +\infty \text{ έχω} \\ \chi > 0 \text{ άρα } |\chi| = \chi \end{matrix} \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi \left(\sqrt{\alpha - \frac{1}{\chi}} - 3 + \frac{\beta}{\chi} \right)}{\chi} = 3 \Leftrightarrow \\ &\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\alpha - \frac{1}{\chi}} - 3 + \frac{\beta}{\chi} \right) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} - 3 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 36 \end{aligned}$$

$$\text{Και } (β) \quad \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (f(\chi) - 3\chi) = -1 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{36\chi^2 - \chi} - 3\chi + \beta - 3\chi \right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{36\chi^2 - \chi} - 6\chi + \beta \right) = -1 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\chi^2 \left(36 - \frac{1}{\chi} \right)} - 6\chi + \beta \right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{36\chi^2 - \chi} - 6\chi + \beta \right) \cdot \left(\sqrt{36\chi^2 - \chi} + 6\chi - \beta \right)}{\sqrt{36\chi^2 - \chi} + 6\chi - \beta} = -1 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{36\chi^2 - \chi} \right)^2 - (6\chi - \beta)^2}{\sqrt{36\chi^2 - \chi} + 6\chi - \beta} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{36\chi^2 - \chi - 36\chi^2 - \beta^2 + 12\beta\chi}{\sqrt{36\chi^2 - \chi + 6\chi - \beta}} = -1 \Leftrightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{12\beta\chi - \chi - \beta^2}{\sqrt{36\chi^2 - \chi + 6\chi - \beta}} = -1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{12\beta - 1}{12} = -1$$

Απ' όπου έχω $\beta = -\frac{11}{12}$

β τρόπος

Αφού η $y = 3\chi - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ θα ισχύει:

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - (3\chi - 1)] = 0 \quad (2)$$

Έχω $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - (3\chi - 1)] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [\sqrt{\alpha\chi^2 - \chi} - 3\chi + \beta - (3\chi - 1)] =$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\sqrt{\alpha\chi^2 - \chi} - 6\chi + \beta + 1) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\chi^2 \left(\alpha - \frac{1}{\chi} \right)} - 6\chi + \beta + 1 \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\chi \sqrt{\alpha - \frac{1}{\chi}} - 6\chi + \beta + 1 \right) \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow +\infty \text{ έχω} \\ \chi > 0 \text{ άρα } |\chi| = \chi}}{=} \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\chi \sqrt{\alpha - \frac{1}{\chi}} - 6\chi + \beta + 1 \right) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left[\chi \left(\sqrt{\alpha - \frac{1}{\chi}} - 6 + \frac{\beta}{\chi} + \frac{1}{\chi} \right) \right] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \chi \cdot \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\alpha - \frac{1}{\chi}} - 6 + \frac{\beta}{\chi} + \frac{1}{\chi} \right) = (+\infty) \cdot (\sqrt{\alpha} - 6) \quad (3)$$

Αν $\sqrt{\alpha} - 6 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 36$, τότε (3) $\Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - (3\chi - 1)] = +\infty$ άρα δεν θα ισχύει η (2),

άρα η $y = 3\chi - 1$ δεν θα είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Αν $\sqrt{\alpha} - 6 < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (0, 36)$, τότε (3) $\Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - (3\chi - 1)] = -\infty$ άρα δεν θα ισχύει η

(2), άρα και πάλι η $y = 3\chi - 1$ δεν θα είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Αν $\alpha = 36$, τότε (η (3) δίνει απροσδιοριστία της μορφής $(+\infty) \cdot 0$) έχω:

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} [f(\chi) - (3\chi - 1)] = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\sqrt{36\chi^2 - \chi} - 6\chi + \beta + 1) =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{36\chi^2 - \chi} - 6\chi + \beta + 1) \cdot (\sqrt{36\chi^2 - \chi} + 6\chi - \beta - 1)}{\sqrt{36\chi^2 - \chi} + 6\chi - \beta - 1} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{36\chi^2 - \chi})^2 - (6\chi - \beta - 1)^2}{\sqrt{36\chi^2 - \chi} + 6\chi - \beta - 1} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{36\chi^2 - \chi - 36\chi^2 - \beta^2 - 1 + 12\beta\chi + 12\chi - 2\beta}{\sqrt{36\chi^2 - \chi} + 6\chi - \beta - 1} = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{12\beta\chi + 11\chi - \beta^2 - 1 - 2\beta}{\sqrt{36\chi^2 - \chi} + 6\chi - \beta - 1} = \dots = \frac{12\beta + 11}{12}$$

Άρα για να ισχύει η (2) θα πρέπει $\frac{12\beta + 11}{12} = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{11}{12}$

Τελικά έχω $\alpha = 36$ και $\beta = -\frac{11}{12}$

Π.Χ. 6) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f , έχει την ευθεία $y = 2x + 1$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 f(x) - x + 2}{x f(x) + 3x - 1}$

Λύση

1^{ος} τρόπος λύσης Αφού η $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Έχω } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 f(x) - x + 2}{x f(x) + 3x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 (f(x) - 2x) - x + 2}{x^2 \frac{f(x)}{x} + 3x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 \left[(f(x) - 2x) - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right]}{x^2 \left[\frac{f(x)}{x} + 3/x - 1/x^2 \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x) - 2x) - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{f(x)}{x} + 3/x - 1/x^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0 - 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος λύσης Αφού η $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0 \quad (\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{Έχω } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 f(x) - x + 2}{x f(x) + 3x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 [f(x) - (2x + 1) + (2x + 1)] - x + 2}{x [f(x) - (2x + 1) + (2x + 1)] + 3x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 (f(x) - (2x + 1)) - 2x^3 - x^2 - x + 2}{x (f(x) - (2x + 1)) + 2x^2 + x + 3x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 (f(x) - (2x + 1)) - x^2 - x + 2}{x (f(x) - (2x + 1)) + 2x^2 + 4x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 \left[(f(x) - (2x + 1)) - 1 - 1/x + 2/x^2 \right]}{x^2 \left[\frac{(f(x) - (2x + 1))}{x} + 2 + 4/x - 1/x^2 \right]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(f(x) - (2x + 1)) + 1 + 1/x - 2/x^2}{\frac{(f(x) - (2x + 1))}{x} + 2 + 4/x - 1/x^2} = \frac{-0 + 1 + 0 - 0}{0 + 2 + 0 - 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Παρουσίασα στο
ζητούμενο όριο την
παράσταση
 $f(x) - (2x + 1)$ για την
οποία γνωρίζω ότι
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0$

3^{ος} τρόπος λύσης Ονομάζω: $f(x) - (2x + 1) = h(x) \Rightarrow f(x) = h(x) + (2x + 1)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \quad (\alpha)$

$$\begin{aligned} \text{Έχω } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 f(x) - x + 2}{x f(x) + 3x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 [h(x) + (2x + 1)] - x + 2}{x [h(x) + (2x + 1)] + 3x - 1} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 \left(h(x) + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{h(x)}{x} + 2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

18) ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ f, f', f'' και συμπεράσματα που μπορώ να αποκομίσω έχοντας τη γραφική παράσταση μιας εκ των f, f', f''

ΙΣΧΥΟΥΝ:

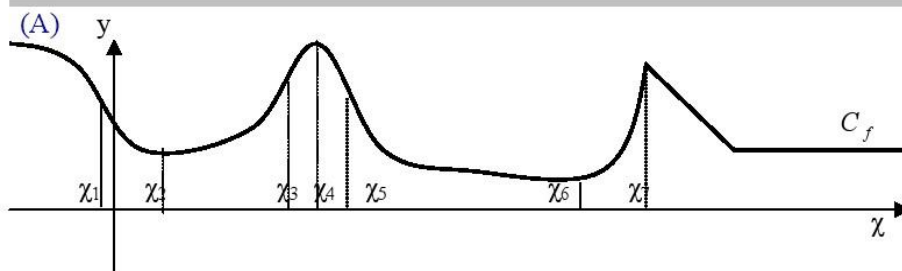
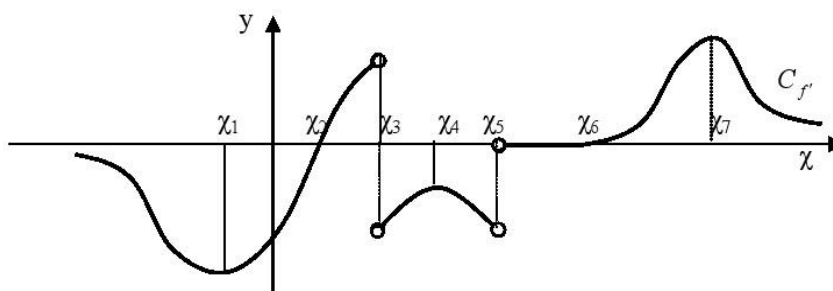
- $f'' > 0 \quad \forall \chi \in \Delta \Leftrightarrow f' \nearrow \text{ στο } \Delta \Leftrightarrow f \cup$ (η C_f στρέφει τα κοίλα άνω) στο Δ
- $f'' < 0 \quad \forall \chi \in \Delta \Leftrightarrow f' \searrow \text{ στο } \Delta \Leftrightarrow f \cap$ (η C_f στρέφει τα κοίλα κάτω) στο Δ
- $f'' = 0 \quad \forall \chi \in \Delta \Leftrightarrow f' = c \quad \forall \chi \in \Delta \Leftrightarrow f(\chi) = c\chi + b \quad \forall \chi \in \Delta$, με $c, b \in \mathbb{R}$
- $f' > 0 \quad \forall \chi \in \Delta \Leftrightarrow f \nearrow \text{ στο } \Delta$
- $f' < 0 \quad \forall \chi \in \Delta \Leftrightarrow f \searrow \text{ στο } \Delta$
- $f' = 0 \quad \forall \chi \in \Delta \Leftrightarrow f(\chi) = c \quad \forall \chi \in \Delta$, με $c \in \mathbb{R}$
- $\left(\begin{array}{l} \text{Το σημείο } (\chi_0, f(\chi_0)) \text{ είναι γωνιακό} \\ \text{σημείο ή σημείο ασυνέχειας της } C_f \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Δεν ορίζεται σε αυτό το σημείο} \\ \text{η } f' \text{ (και κατ' επέκταση και η } f'') \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{l} \text{Το γράφημα} \\ \text{της } f'' \text{ τέμνει} \\ \text{τον } \chi'\chi \text{ στο } \chi_0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Το γράφημα της } f' \\ \text{παρουσιάζει ακρότατο} \\ \text{στο σημείο } (\chi_0, f'(\chi_0)) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Το γράφημα της } f \\ \text{παρουσιάζει καμπή} \\ \text{στο σημείο } (\chi_0, f(\chi_0)) \end{array} \right)$
- $\left(\begin{array}{l} \text{Το γράφημα της } f' \\ \text{τέμνει τον } \chi'\chi \text{ στο } \chi_0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Το γράφημα της } f \text{ παρουσιάζει} \\ \text{ακρότατο στο σημείο } (\chi_0, f(\chi_0)) \end{array} \right)$

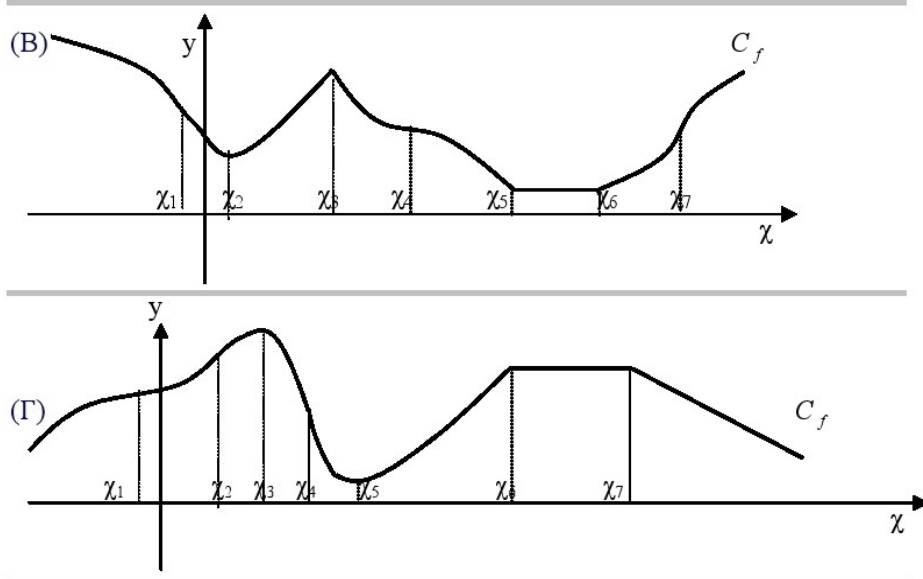
παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Π.χ. 1) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{\chi_3, \chi_5\}$. Αν το παρακάτω σχήμα είναι το γράφημα της παραγώγου της

- Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα, γνήσια φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και επίσης να προσδιορίσετε τις θέσεις των τοπικών ακρότατων και των σημείων καμπής.
- Να βρείτε ποιο από τα γραφήματα (Α), (Β), (Γ), θα μπορούσε να είναι το γράφημα της f

γράφημα της f'





Λύση

(i) Από το γράφημα της f' έχω ότι

$$\text{Για } \chi \in (-\infty, \chi_1) \text{ είναι } \left| \begin{array}{c} f'(\chi) < 0 \\ \text{και} \\ f' \searrow \Rightarrow f''(\chi) < 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Άρα η } f \text{ είναι γνήσια φθίνουσα} \\ \text{και κοίλη στο } (-\infty, \chi_1] \end{array}$$

$$\text{Για } \chi \in (\chi_1, \chi_2) \text{ είναι } \left| \begin{array}{c} f'(\chi) < 0 \\ \text{και} \\ f' \nearrow \Rightarrow f''(\chi) > 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Άρα η } f \text{ είναι γνήσια φθίνουσα} \\ \text{και κυρτή στο } [\chi_1, \chi_2] \end{array}$$

$$\text{Για } \chi \in (\chi_2, \chi_3) \text{ είναι } \left| \begin{array}{c} f'(\chi) > 0 \\ \text{και} \\ f' \nearrow \Rightarrow f''(\chi) > 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Άρα η } f \text{ είναι γνήσια αύξουσα} \\ \text{και κυρτή στο } [\chi_2, \chi_3] \end{array}$$

$$\text{Για } \chi \in (\chi_3, \chi_4) \text{ είναι } \left| \begin{array}{c} f'(\chi) < 0 \\ \text{και} \\ f' \nearrow \Rightarrow f''(\chi) > 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Άρα η } f \text{ είναι γνήσια φθίνουσα} \\ \text{και κυρτή στο } [\chi_3, \chi_4] \end{array}$$

$$\text{Για } \chi \in (\chi_4, \chi_5) \text{ είναι } \left| \begin{array}{c} f'(\chi) < 0 \\ \text{και} \\ f' \searrow \Rightarrow f''(\chi) < 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Άρα η } f \text{ είναι γνήσια φθίνουσα} \\ \text{και κοίλη στο } [\chi_4, \chi_5] \end{array}$$

$$\text{Για } \chi \in (\chi_5, \chi_6) \text{ είναι } f'(\chi) = 0 \Rightarrow f(\chi) = c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ για κάθε } \chi \in [\chi_5, \chi_6]$$

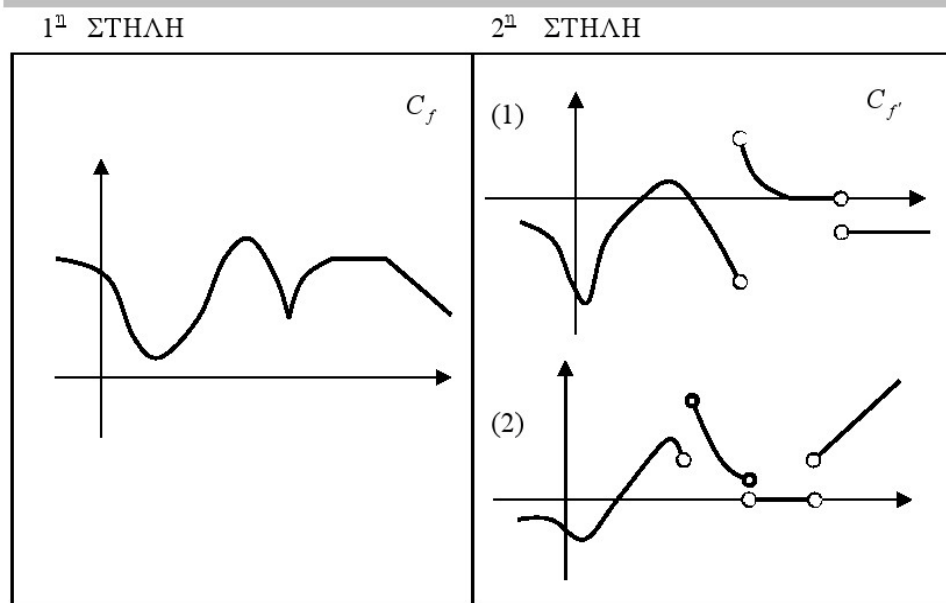
$$\text{Για } \chi \in (\chi_6, \chi_7) \text{ είναι } \left| \begin{array}{c} f'(\chi) > 0 \\ \text{και} \\ f' \nearrow \Rightarrow f''(\chi) > 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Άρα η } f \text{ είναι γνήσια αύξουσα} \\ \text{και κυρτή στο } [\chi_6, \chi_7] \end{array}$$

Για $x \in (x_7, +\infty)$ είναι $\left| \begin{array}{c} f'(x) > 0 \\ \text{και} \\ f'(x) \nearrow \Rightarrow f''(x) < 0 \end{array} \right|$ Άρα η f είναι γνήσια αύξουσα και κοίλη στο $[x_7, +\infty)$

Από τα παραπάνω συμπεραίνω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα σημεία $(x_2, f(x_2))$, $(x_5, f(x_5))$ και $(x_6, f(x_6))$, τοπικό μέγιστο στο σημείο $(x_3, f(x_3))$ και καμπή στα σημεία $(x_1, f(x_1))$, $(x_4, f(x_4))$ και $(x_7, f(x_7))$

(ii) Από τα γραφήματα (Α), (Β) και (Γ), αυτό που φαίνεται ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις (όπως αυτές φάνηκαν στο (i)) είναι το (Β).

Π.Χ. 2) Στην πρώτη στήλη του παρακάτω πίνακα βρίσκεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , ενώ στη δεύτερη στήλη μία από τις γραφικές παραστάσεις που υπάρχουν, είναι η γραφική παράσταση της f' . Να βρείτε ποια είναι.



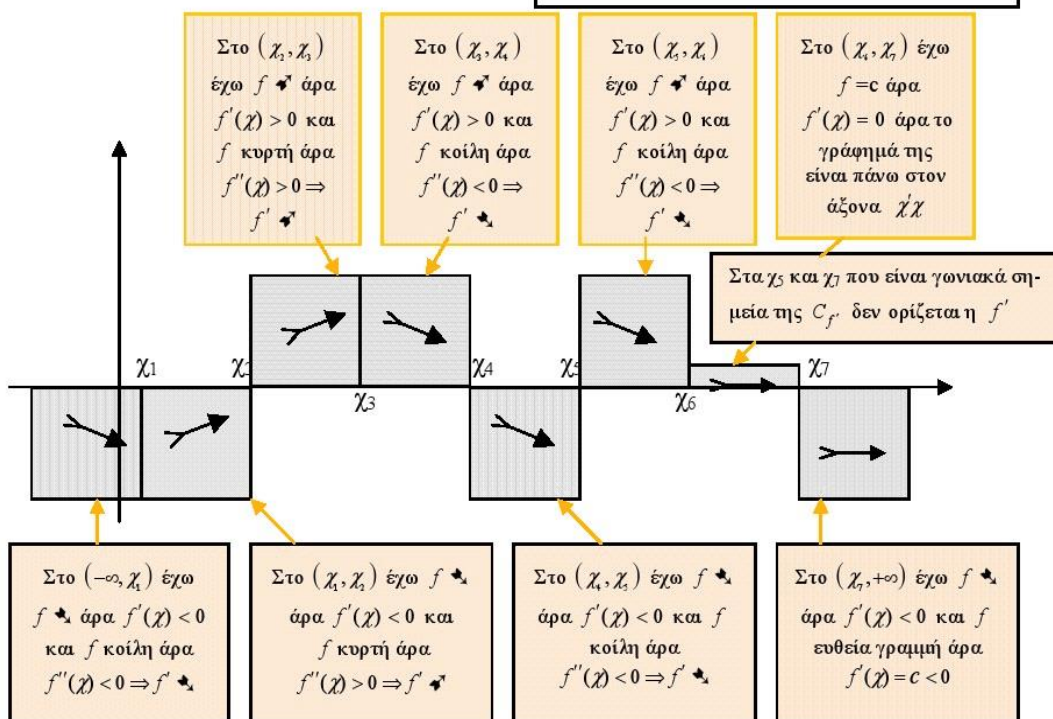
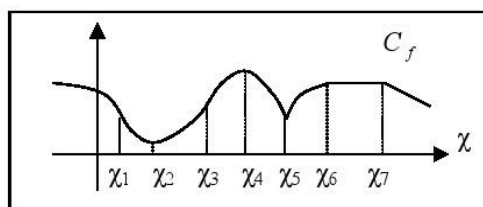
Λύση

Θα πρέπει να προσέξω

1. τα διαστήματα στα οποία έχω $f' \nearrow$, (αντίστοιχα $f' \searrow$), αφού σε αυτά το γράφημα της f' θα πρέπει να είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, (αντίστοιχα κάτω από τον άξονα $x'x$)
2. τα διαστήματα στα οποία έχω $f' \cup$, (αντίστοιχα $f' \cap$) αφού σε αυτά θα έχω $f''(x) > 0$ άρα $f' \nearrow$, (αντίστοιχα $f''(x) < 0$ άρα $f' \searrow$)
3. τα γωνιακά σημεία της f , αφού σε αυτά δεν υπάρχει η f'
4. Τα τοπικά ακρότατα της f , αφού σε αυτά η f' αλλάζει πρόσημο (δηλ. το γράφημά της βρίσκεται εκατέρωθεν του $x'x$)

Στο διάγραμμα της f έχω:

Φτιάχνω πρόχειρο σύστημα αξόνων και σκιαγραφώ τα μέρη στα οποία θα βρίσκεται η $C_{f'}$



Από τα παραπάνω φαίνεται ότι το γράφημα της f' είναι το (1)

19) ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ (υπενθυμίσεις από Β' Λυκείου)

Αν για το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha_n \chi^n + \alpha_{n-1} \chi^{n-1} + \dots + \alpha_1 \chi + \alpha_0$ (βαθμού $n \geq 1$) δοθεί ότι:

- $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ είναι οι ρίζες του, τότε γράφουμε: $P(\chi) = \alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_n)$
- ρ είναι μια ρίζα του, τότε γράφουμε: $P(\chi) = (\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi)$,
όπου $\Pi(\chi)$ πολυώνυμο $(n-1)$ βαθμού.
- ρ_1, ρ_2 είναι δύο ρίζες του, τότε γράφουμε: $P(\chi) = (\chi - \rho_1) \cdot (\chi - \rho_2) \Pi(\chi)$,
όπου $\Pi(\chi)$ πολυώνυμο $(n-2)$ βαθμού.
- ρ είναι μια ρίζα του με βαθμό πολλαπλότητας 1, τότε γράφουμε: $P(\chi) = (\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi)$,
όπου $\Pi(\chi)$ πολυώνυμο $(n-1)$ βαθμού και $\Pi(\rho) \neq 0$.
- ρ είναι διπλή ρίζα του, τότε γράφουμε: $P(\chi) = (\chi - \rho)^2 \cdot \Pi(\chi)$,
όπου $\Pi(\chi)$ πολυώνυμο $(n-2)$ βαθμού.

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Π.χ. 1) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και πολυώνυμο $P(\chi)$ βαθμού $n \geq 1$.
Αν ρ είναι μια ρίζα του $P(\chi)$, με βαθμό πολλαπλότητας 1, δείξτε ότι: Αν η

συνάρτηση f με τύπο $f(\chi) = g(\chi) \cdot |P(\chi)|$ είναι παρ/μη στο $\chi_0 = \rho$, τότε το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(\chi) = 0$. Αντιστρόφως: Αν $\chi_0 = \rho$, ρίζα και των $P(\chi)$ και $g(\chi)$, δείξτε ότι η $f(\chi) = g(\chi) \cdot |P(\chi)|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = \rho$

Λύση

Αφού το ρ είναι ρίζα του $P(\chi)$ με βαθμό πολλαπλότητας 1, θα έχω:

$P(\chi) = (\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi)$, όπου $\Pi(\chi)$ πολυώνυμο $(n-1)$ βαθμού και $\Pi(\rho) \neq 0$,

οπότε $f(\chi) = g(\chi) \cdot |(\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi)|$ και $f(\rho) = 0$

Αφού η f είναι παρ/μη στο $\chi_0 = \rho$, θα ισχύει $\lim_{\chi \rightarrow \rho} \frac{f(\chi) - f(\rho)}{\chi - \rho} = f'(\rho) \Rightarrow$

$$\lim_{\chi \rightarrow \rho} \frac{g(\chi) \cdot |(\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi)|}{\chi - \rho} = f'(\rho) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow \rho} \frac{g(\chi) \cdot |\chi - \rho| \cdot |\Pi(\chi)|}{\chi - \rho} = f'(\rho) \quad (1)$$

Όμως για $\chi > \rho$ έχω $|\chi - \rho| = \chi - \rho$ άρα (1) $\Rightarrow$

$$\lim_{\chi \rightarrow \rho^+} \frac{g(\chi) \cdot (\chi - \rho) \cdot |\Pi(\chi)|}{\chi - \rho} = f'(\rho) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow \rho^+} g(\chi) \cdot |\Pi(\chi)| = f'(\rho) \quad (\alpha)$$

Και για $\chi < \rho$ έχω $|\chi - \rho| = -(\chi - \rho)$ άρα (1) $\Rightarrow$

$$\lim_{\chi \rightarrow \rho^-} \frac{-g(\chi) \cdot (\chi - \rho) \cdot |\Pi(\chi)|}{\chi - \rho} = f'(\rho) \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow \rho^-} [-g(\chi) \cdot |\Pi(\chi)|] = f'(\rho) \quad (\beta)$$

Όμως η $g(\chi)$ είναι συνεχής από υπόθεση και η $\Pi(\chi)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική άρα θα ισχύουν $\lim_{\chi \rightarrow \rho} g(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \rho^+} g(\chi) = g(\rho)$ και $\lim_{\chi \rightarrow \rho^-} \Pi(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \rho^+} \Pi(\chi) = \Pi(\rho)$

$$\text{Άρα} \quad \left. \begin{array}{l} (\alpha) \Rightarrow g(\rho) \cdot |\Pi(\rho)| = f'(\rho) \\ (\beta) \Rightarrow -g(\rho) \cdot |\Pi(\rho)| = f'(\rho) \end{array} \right\} \Rightarrow g(\rho) \cdot |\Pi(\rho)| = -g(\rho) \cdot |\Pi(\rho)| \Rightarrow$$

$$2g(\rho) \cdot |\Pi(\rho)| = 0 \quad \overset{\Pi(\rho) \neq 0}{\Rightarrow} \quad g(\rho) = 0 \quad \text{άρα το } \chi_0 = \rho \text{ είναι ρίζα της εξίσωσης } g(\chi) = 0$$

Αντιστρόφως θα δείξω ότι αν το $\chi_0 = \rho$ είναι ρίζα και του $P(\chi)$ και της $g(\chi)$

τότε η $f(\chi) = g(\chi) \cdot |P(\chi)|$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = \rho$

Αφού το ρ είναι ρίζα του $P(\chi)$ θα έχω: $P(\chi) = (\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi)$,

όπου $\Pi(\chi)$ πολυώνυμο $(n-1)$ βαθμού

και ακόμα $g(\rho) = 0$ αφού το $\chi_0 = \rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(\chi) = 0$

$$\text{Έχω: } \lim_{\chi \rightarrow \rho} \frac{f(\chi) - f(\rho)}{\chi - \rho} = \lim_{\chi \rightarrow \rho} \frac{g(\chi) \cdot |(\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi)|}{\chi - \rho} = \lim_{\chi \rightarrow \rho} \frac{g(\chi) \cdot |\chi - \rho| \cdot |\Pi(\chi)|}{\chi - \rho} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{\chi \rightarrow \rho^+} \frac{g(\chi) \cdot |\chi - \rho| \cdot |\Pi(\chi)|}{\chi - \rho} = \lim_{\chi \rightarrow \rho^+} g(\chi) \cdot |\Pi(\chi)| = g(\rho) \cdot |\Pi(\rho)| = 0 \\ \lim_{\chi \rightarrow \rho^-} \frac{g(\chi) \cdot |\chi - \rho| \cdot |\Pi(\chi)|}{\chi - \rho} = \lim_{\chi \rightarrow \rho^-} [-g(\chi) \cdot |\Pi(\chi)|] = -g(\rho) \cdot |\Pi(\rho)| = 0 \end{cases}$$

Άρα $\lim_{\chi \rightarrow \rho} \frac{f(\chi) - f(\rho)}{\chi - \rho} = 0$ άρα η f είναι παρ/μη στο $\chi_0 = \rho$ και $f'(\rho) = 0$

χρησιμοποίησα και πάλι ότι $\lim_{\chi \rightarrow \rho^-} g(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \rho^+} g(\chi) = g(\rho)$
και $\lim_{\chi \rightarrow \rho^-} \Pi(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow \rho^+} \Pi(\chi) = \Pi(\rho)$ αφού η $g(\chi)$ και η $\Pi(\chi)$ είναι συνεχείς

Π.χ. 2) Αν $P(\chi)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\nu \geq 1$ και $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_\nu$ οι ρίζες του,

Δείξτε ότι: $\frac{P'(\chi)}{P(\chi)} = \frac{1}{\chi - \rho_1} + \frac{1}{\chi - \rho_2} + \frac{1}{\chi - \rho_3} + \dots + \frac{1}{\chi - \rho_\nu}$

Λύση

Αφού $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu$ είναι οι ρίζες του $P(\chi)$, θα έχω: $P(\chi) = \alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_\nu)$

Είναι: $P'(\chi) = (\alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_\nu))' \Rightarrow$

$$P'(\chi) = \alpha(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_\nu) + \alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_3) \dots (\chi - \rho_\nu) + \dots + \alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_{\nu-1})$$

Άρα για $\chi \neq \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu$ θα έχω

$$\begin{aligned} \frac{P'(\chi)}{P(\chi)} &= \frac{\alpha(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_\nu) + \alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_3) \dots (\chi - \rho_\nu) + \dots + \alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_{\nu-1})}{\alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_\nu)} = \\ &= \frac{\alpha(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_\nu)}{\alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_\nu)} + \frac{\alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_3) \dots (\chi - \rho_\nu)}{\alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_\nu)} + \dots + \frac{\alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_{\nu-1})}{\alpha(\chi - \rho_1)(\chi - \rho_2) \dots (\chi - \rho_\nu)} = \\ &= \frac{1}{\chi - \rho_1} + \frac{1}{\chi - \rho_2} + \dots + \frac{1}{\chi - \rho_\nu} \end{aligned}$$

Π.χ. 3) Δείξτε ότι αν το ρ είναι διπλή ρίζα ενός πολυωνύμου $P(\chi)$ βαθμού $\nu \geq 2$, τότε το ρ είναι ρίζα και του $P'(\chi)$ και αντιστρόφως αν το ρ είναι ρίζα των πολυωνύμων $P(\chi)$ και $P'(\chi)$ τότε το ρ είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου $P(\chi)$,

Λύση

Αφού το ρ είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου έχω: $P(\chi) = (\chi - \rho)^2 \cdot \Pi(\chi)$, όπου $\Pi(\chi)$ πολυώνυμο $(\nu - 2)$ βαθμού

Έχω $P'(\chi) = ((\chi - \rho)^2 \cdot \Pi(\chi))' = 2(\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi) + (\chi - \rho)^2 \cdot \Pi'(\chi)$, άρα θα είναι

$$P'(\rho) = 2(\rho - \rho) \cdot \Pi(\rho) + (\rho - \rho)^2 \cdot \Pi'(\rho) = 0 \quad \text{άρα το } \rho \text{ είναι ρίζα και του } P'(\chi)$$

Αντιστρόφως Αν το ρ είναι ρίζα των $P(\chi)$ και $P'(\chi)$ θα έχω $P(\rho) = P'(\rho) = 0$

και $P(\chi) = (\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi)$, (A) όπου $\Pi(\chi)$ πολυώνυμο $(n-1)$ βαθμού

$$\text{Οπότε } P'(\chi) = ((\chi - \rho) \cdot \Pi(\chi))' = \Pi(\chi) + (\chi - \rho) \cdot \Pi'(\chi) \quad (1)$$

$$\text{Επειδή } P'(\rho) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Pi(\rho) + (\rho - \rho) \cdot \Pi'(\rho) = 0 \Rightarrow \Pi(\rho) = 0$$

Άρα το ρ είναι ρίζα του $\Pi(\chi)$ άρα $\Pi(\chi) = (\chi - \rho) \cdot K(\chi)$, (B)

$$\text{Από (A) και (B) έχω } P(\chi) = (\chi - \rho) \cdot (\chi - \rho) \cdot K(\chi) \Rightarrow P(\chi) = (\chi - \rho)^2 \cdot K(\chi)$$

Άρα το ρ είναι διπλή ρίζα του πολυωνύμου $P(\chi)$

20) ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – Χάραξη της γραφικής της παράστασης

Αν ζητηθεί να μελετήσουμε μια συνάρτηση f και να χαράξουμε το γράφημά της τότε

1. Βρίσκω το A_f , ελέγχω αν είναι συνεχής και ελέγχω αν
 - Είναι περιττή (οπότε η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$) δηλ. αν $\forall \chi \in A_f, -\chi \in A_f$ και $f(-\chi) = -f(\chi)$ (Τότε μπορώ να μελετήσω την f στο θετικό διάστημα του A_f και να βγάλω τα συμπεράσματά μου στο άλλο μισό λόγω συμμετρίας – ΔΕΝ ΣΥΝΙΣΤΑΤΑΙ!)
 - Είναι άρτια (οπότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$) δηλ. αν $\forall \chi \in A_f, -\chi \in A_f$ και $f(-\chi) = f(\chi)$ (Τότε μπορώ να μελετήσω την f στο θετικό διάστημα του A_f και να βγάλω τα συμπεράσματά μου στο άλλο μισό λόγω συμμετρίας – επίσης ΔΕΝ ΣΥΝΙΣΤΑΤΑΙ!)
 - Είναι περιοδική δηλ. υπάρχει $T \in \mathbb{R}_+^*$ ώστε $\forall \chi \in A_f, \chi + T \in A_f$ και $f(\chi + T) = f(\chi)$ (οπότε θα μελετήσω την f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου)
 - Βρίσκω (εφ' όσον είναι εύκολο) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
2. Βρίσκω τις $f'(\chi)$ και $f''(\chi)$ όπου αυτές ορίζονται.
3. Φτιάχνω πίνακα μεταβολής προσήμων της $f'(\chi)$ και βγάζω τα συμπεράσματά μου για τη Μονοτονία και τα Ακρότατα της f .
4. Φτιάχνω πίνακα μεταβολής προσήμων της $f''(\chi)$ και βγάζω τα συμπεράσματά μου για το πώς η C_f στρέφει τα Κοίλα, καθώς και για τα Σημεία Καμπής.
5. Ελέγχω τη συμπεριφορά της f στα ανοικτά άκρα των διαστημάτων που συνθέτουν το A_f (δηλ. υπολογίζω τα αντίστοιχα όρια). Απ' εδώ βρίσκω τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες (αν υπάρχουν).
6. Αν σε κάποιο άπειρο $(+\infty$ ή $-\infty)$, δεν βρέθηκε οριζόντια ασύμπτωτη ψάχνω για πλάγια.
7. Φτιάχνω γενικό πίνακα στον οποίο θα φαίνονται
 - Τα πρόσημα των $f'(\chi)$ και $f''(\chi)$
 - Μονοτονία – Κοίλα – Ακρότατα – Σημεία Καμπής – Οριακές τιμές της f
8. Χαράζω το Γράφημα της f τοποθετώντας
 - (α) Τις ασύμπτωτες
 - (β) Τα Ακρότατα – Σημεία Καμπής – Σημεία Τομής Αξόνων – Οριακές τιμές της f
 - (γ) Ενώνω τα παραπάνω σημεία κατά πώς μου δείχνει ο πίνακας του 7^{ου} βήματος

παραδείγματα (με σχόλια κατά τη λύση τους)

Π.Χ. 1) Να μελετήσετε και να χαράξετε τη γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων

(i) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ (ii) $g(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ (iii) $h(x) = 2 + x - \sqrt[3]{e^x}$

Λύση

(i) Έχω ότι η f ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ (άρα $A_f = \mathbb{R}$) και είναι συνεχής ως ρητή.

Ακόμα παρατηρώ ότι $\forall x \in A_f$ έχω $-x \in A_f$ και

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+2} = -\frac{x}{x^2+2} = -f(x) \text{ άρα η } f \text{ είναι περιττή οπότε η } C_f \text{ έχει κέντρο}$$

συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

Τέμνει τον άξονα $y'y$ όταν $x=0 \Rightarrow y=f(0) \Rightarrow y=0$ και τον άξονα $x'x$ όταν

$$y=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+2} \right)' = \frac{1 \cdot (x^2+2) - x \cdot (x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \dots = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \left(\frac{2-x^2}{(x^2+2)^2} \right)' = \frac{(2-x^2)' \cdot (x^2+2)^2 - (2-x^2) \cdot ((x^2+2)^2)'}{(x^2+2)^4} = \dots = \frac{2x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ \text{ή} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$$

Από το διπλανό πίνακα μεταβολής των προσήμων της $f'(x)$ έχω ότι

f $\nearrow$ στο $(-\infty, -\sqrt{2}]$ και στο $[\sqrt{2}, +\infty)$

και f $\searrow$ στο $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

χ	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(\chi)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(\chi)$					

Άρα έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})) = \left(-\sqrt{2}, \frac{-\sqrt{2}}{4}\right)$

και τοπικό μέγιστο στο σημείο $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})) = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\sqrt{6} \text{ ή } x=-\sqrt{6}$$

Από το διπλανό πίνακα μεταβολής των
προσήμων της $f''(\chi)$ έχω ότι η f είναι
κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{6}]$ και

$[0, \sqrt{6}]$ και κυρτή στα διαστήματα

$[-\sqrt{6}, 0]$ και $[\sqrt{6}, +\infty)$

Άρα παρουσιάζει καμπή στα σημεία

$$\left(-\sqrt{6}, f(-\sqrt{6})\right) = \left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{8}\right), (0, f(0)) = (0, 0) \text{ και } \left(\sqrt{6}, f(\sqrt{6})\right) = \left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)$$

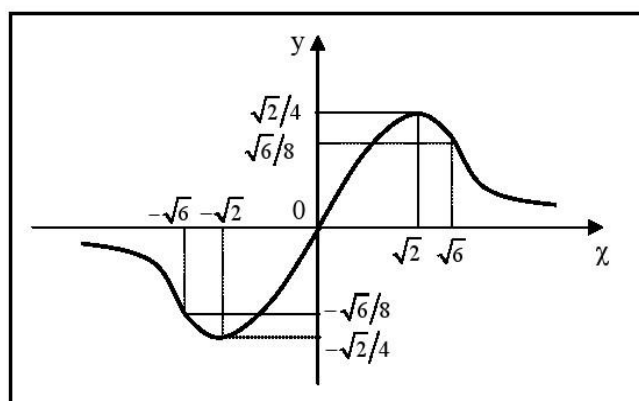
$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow -\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\chi}{\chi^2 + 2} = 0 \text{ και } \lim_{\chi \rightarrow +\infty} f(\chi) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\chi}{\chi^2 + 2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (δηλ. ο άξονας $\chi'\chi$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f
και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Φτιάχνω έναν πίνακα όπου φαίνονται όλες οι μεταβολές των f, f' και f''

χ	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(\chi)$	—	—	0	+	+	0	—
$f''(\chi)$	—	0	+	+	0	—	0
$f(\chi)$	0	$-\sqrt{6}/8$	$-\sqrt{2}/4$	0	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{6}/8$	0

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f



- (ii) Έχω ότι η g ορίζεται $\forall \chi \in \mathbb{R}$ (άρα $A_g = \mathbb{R}$) και είναι συνεχής ως διαφορά των
τριγωνομετρικών $\eta\mu\chi$ και $\sigma\upsilon\nu\chi$

Ακόμα παρατηρώ ότι $\forall \chi \in A_g$ έχω $\chi + 2\pi \in A_g$ και

$$g(\chi + 2\pi) = \eta\mu(\chi + 2\pi) - \sigma\upsilon\nu(\chi + 2\pi) = \eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = g(\chi) \text{ άρα η } g \text{ είναι περιοδική} \\ \text{με περίοδο } T = 2\pi \text{ οπότε αρκεί να τη μελετήσω στο } [0, 2\pi]$$

Τέμνει τον άξονα $y'y$ όταν $\chi = 0 \Rightarrow y = g(0) \Rightarrow y = -1$ και τον άξονα $\chi'\chi$ όταν

$$y = 0 \Leftrightarrow g(\chi) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi - \sigma\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \sigma\nu\chi \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \chi \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \eta \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \chi \Leftrightarrow 0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{Αδύνατο} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 \leq \chi \leq 2\pi \\ \Leftrightarrow \chi = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \chi = \frac{5\pi}{4} \end{array}$$

$$g'(\chi) = (\eta\mu\chi - \sigma\nu\chi)' = \sigma\nu\chi + \eta\mu\chi \quad \text{και} \quad g''(\chi) = (\sigma\nu\chi + \eta\mu\chi)' = -\eta\mu\chi + \sigma\nu\chi$$

$$g'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \sigma\nu\chi + \eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow \sigma\nu\chi = -\eta\mu\chi \Leftrightarrow \sigma\nu\chi = \sigma\nu\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + \chi \Leftrightarrow 0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{Αδύνατο} \\ \eta \\ \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} - \chi \Leftrightarrow 2\chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 \leq \chi \leq 2\pi \\ \Leftrightarrow \chi = \frac{3\pi}{4} \text{ ή } \chi = \frac{7\pi}{4} \end{array}$$

Φτιάχνω τον πίνακα μεταβολής των προσήμων της $g'(\chi)$

χ	0	$3\pi/4$	$7\pi/4$	2π
χ_o	$\pi/2$	π	$11\pi/6$	
$g'(\chi_o)$	$g'(\pi/2) = 1 > 0$	$g'(\pi) = -1 < 0$	$g'(11\pi/6) = (\sqrt{3}-1)/2 > 0$	
$g'(\chi)$	+	0	-	0
$g(\chi)$				

Άρα έχω $g \nearrow$ στα διαστήματα $[0, 3\pi/4], [7\pi/4, 2\pi]$ και $g \searrow$ στο $[3\pi/4, 7\pi/4]$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (τ.μ.) στο σημείο $(3\pi/4, g(3\pi/4)) = (3\pi/4, \sqrt{2})$ και

Τοπικό ελάχιστο (τ.ε.) στο σημείο $(7\pi/4, g(7\pi/4)) = (7\pi/4, -\sqrt{2})$.

Στα σημεία $(0, g(0)) = (0, -1)$ και $(2\pi, g(2\pi)) = (2\pi, -1)$ δεν έχω τοπικά ακρότατα

(η g είναι περιοδική, άρα οι παραπάνω μεταβολές της μονοτονίας της θα είναι αντίστοιχες και στο $[-2\pi, 0]$ και στο $[2\pi, 4\pi]$, οπότε δεν θα αλλάξει η μονοτονία της εκατέρωθεν του 0 και του 2π (δες στον παρακάτω πίνακα).)

χ	-2π	$-5\pi/4$	$-\pi/4$	0	$3\pi/4$	$7\pi/4$	2π	$11\pi/4$	$15\pi/4$	4π
$g'(\chi)$	+	-	+	+	0	-	0	+	-	+
$g(\chi)$										

$$g''(\chi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi \stackrel{\substack{\text{όπως στην} \\ g'(\chi)=0}}{\Leftrightarrow} \chi = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \chi = \frac{5\pi}{4}$$

Φτιάχνω τον πίνακα μεταβολής των προσήμων της $g''(\chi)$

χ	0	$\pi/4$	$5\pi/4$	2π
χ_o	$\pi/6$	π	$3\pi/2$	
$g''(\chi_o)$	$g''(\pi/6) = (\sqrt{3}-1)/2 > 0$	$g''(\pi) = -1 < 0$	$g''(3\pi/2) = 1 > 0$	
$g''(\chi)$	+	0	-	0
$g(\chi)$	⌒	⌒	⌒	

Άρα έχω ότι η g είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $[0, \pi/4]$, $[5\pi/4, 2\pi]$ και g κοίλη στο $[3\pi/4, 7\pi/4]$

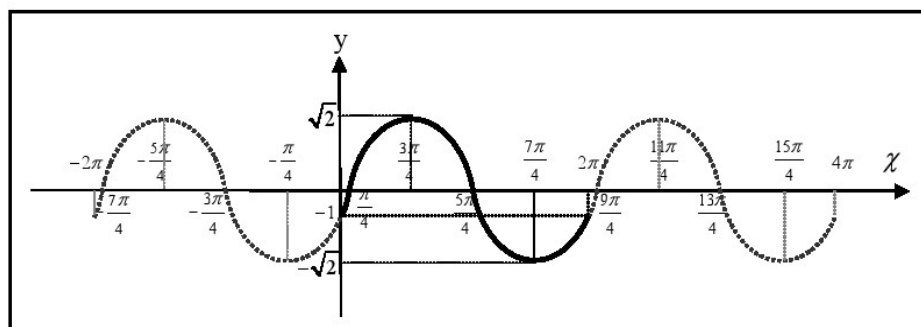
Έχει καμπή στα σημεία $(\pi/4, g(\pi/4)) = (\pi/4, 0)$ και $(5\pi/4, g(5\pi/4)) = (5\pi/4, 0)$. Στα σημεία $(0, g(0)) = (0, -1)$ και $(2\pi, g(2\pi)) = (2\pi, -1)$ δεν παρουσιάζει καμπή (Αντίστοιχοι λόγοι με το ότι δεν έχει ακρότατα σ' αυτά τα σημεία)

Δεν έχει ασύμπτωτες

Φτιάχνω έναν πίνακα όπου φαίνονται όλες οι μεταβολές των g , g' και g''

χ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$g'(\chi)$	+	+	-	-	+	+
$g''(\chi)$	+	-	-	+	+	+
$g(\chi)$	-1	0	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-1

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της g



(iii) Για τον προσδιορισμό του Πεδίου ορισμού της h έχω τους περιορισμούς

$$\left. \begin{array}{l} \chi^2 > 0 \text{ που ισχύει } \forall \chi \in \mathbb{R}^* \text{ και} \\ e^\chi \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει } \forall \chi \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ Άρα } A_h = \mathbb{R}^*$$

Έχω $h(x) = 2 + x - \sqrt[3]{e^x} \Leftrightarrow h(x) = 2 + x - e^{x/3} \Leftrightarrow h(x) = 2 + x - e^{1/x}$
και είναι συνεχής και παρ/μη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$h'(x) = (2 + x - e^{1/x})' \Rightarrow h'(x) = 1 - e^{1/x} \left(\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow h'(x) = 1 + \frac{e^{1/x}}{x^2}, x \in \mathbb{R}^*$$

$$h''(x) = \left(1 + \frac{e^{1/x}}{x^2}\right)' = \frac{(e^{1/x})' \cdot x^2 - e^{1/x} \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{-e^{1/x} - 2xe^{1/x}}{x^4} \Rightarrow$$

$$h''(x) = \frac{-e^{1/x}(1+2x)}{x^4}, x \in \mathbb{R}^*$$

Προφανώς είναι $h'(x) = 1 + \frac{e^{1/x}}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ άρα έχω $h \nearrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

Από το διπλανό πίνακα όπου βρήκα πως μεταβάλλονται τα πρόσημα της

$$h''(x) = \frac{-e^{1/x}(1+2x)}{x^4} \text{ για } x \in \mathbb{R}^*$$

έχω ότι η h είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -1/2]$, κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $[-1/2, 0)$ και $(0, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο

$$\left(-\frac{1}{2}, h\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$-e^{1/x}$	—	—		—
$1+2x$	—	0	+	+
x^4	+	+		+
$h''(x)$	+	0	—	—
$h(x)$				

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + x - e^{1/x})$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$
θα είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2 + (-\infty) - 1 = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x - e^{1/x})$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$
θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2 + (+\infty) - 1 = +\infty$

(Άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη ούτε στο $-\infty$ ούτε στο $+\infty$)

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + x - e^{1/x})$ Έχω $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} \stackrel{\text{θέτω } 1/x = u \text{ τότε}}{=} \lim_{\substack{\text{για } x \rightarrow 0^- \text{ έχω } u \rightarrow -\infty}} e^u = 0$ Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + x - e^{1/x}) = 2 + 0 - 0 = 2$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x - e^{1/x})$ Έχω $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ Άρα
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} \stackrel{\text{θέτω } 1/x = u \text{ τότε}}{=} \lim_{\substack{\text{για } x \rightarrow 0^+ \text{ έχω } u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty$ Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x - e^{1/x}) = 2 + 0 - (+\infty) = -\infty$

Άρα η ευθεία $\chi = 0$ (δηλ. ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h

Ψάχνω για πλάγια ασύμπτωτη

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{h(\chi)}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{2 + \chi - e^{1/\chi}}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{\chi} + 1 - \frac{1}{\chi} \cdot e^{1/\chi} \right) \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow -\infty \\ \text{έχω } \frac{1}{\chi} \rightarrow 0}}{=} 0 + 1 - 0 \cdot e^0 = 1$$

$$\lim_{\chi \rightarrow -\infty} (h(\chi) - 1\chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (2 + \chi - e^{1/\chi} - \chi) = \lim_{\chi \rightarrow -\infty} (2 - e^{1/\chi}) \stackrel{\substack{\text{για } \chi \rightarrow -\infty \\ \text{έχω } \frac{1}{\chi} \rightarrow 0}}{=} 2 - e^0 = 1$$

Άρα η ευθεία $y = \chi + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

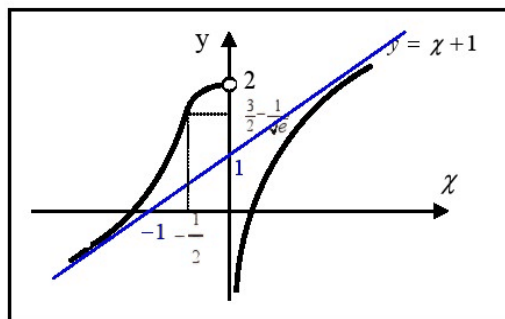
Όμοια βρίσκω ότι $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{h(\chi)}{\chi} = 1$ και $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (h(\chi) - 1\chi) = 1$, άρα η ευθεία

$y = \chi + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h και στο $+\infty$

Φτιάχνω έναν πίνακα όπου φαίνονται ό^ς μεταβολές των h , h' και h''

Αυτή είναι η γραφική παράσταση της h

χ	$-\infty$	$-1/2$	0	$+\infty$
$h'(\chi)$	+	+		+
$h''(\chi)$	+	-		-
$h(\chi)$	$-\infty$	$\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Δεν μπορώ να βρω που ακριβώς τέμνεται ο άξονας $\chi'\chi$ αφού είναι δύσκολη η λύση της $h(\chi) = 0$. Επειδή όμως έχω h συνεχή και $h \nearrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ με $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} h(\chi) = -\infty < 0$, $\lim_{\chi \rightarrow 0^-} h(\chi) = 2 > 0$ και $\lim_{\chi \rightarrow 0^+} h(\chi) = -\infty < 0$, $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} h(\chi) = +\infty > 0$, μπορώ να πω ότι η C_h τέμνει τον $\chi'\chi$ σε δύο ακριβώς σημεία ένα στο $(-\infty, 0)$ και ένα στο $(0, +\infty)$

- Για να χαράξω τη γραφική παράσταση της h

A) τοποθέτησα την πλάγια ασύμπτωτη $y = \chi + 1$ (η κατακόρυφη υπήρχε (είναι ο $y'y$))

B) έλεγξα αν τα χαρακτηριστικά σημεία $(0, 2)$ και $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}})$ βρίσκονται

πάνω ή κάτω από την ασύμπτωτη συγκρίνοντας τις αντίστοιχες τιμές της h και της ευθείας. Για παράδειγμα στο $\chi_0 = -1/2$ η τιμή της ευθείας είναι

$$y = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ ενώ της } h \text{ είναι } h(-1/2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{2} \text{ άρα το σημείο}$$

καμπής βρίσκεται πάνω από την πλάγια ασύμπτωτη

Π.χ. 1) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x_0 = 1$ και η εφαπτόμενή της σε κάθε σημείο της $(x, f(x))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $e^{|x|}$.

Λύση

Γνωρίζω ότι η κλίση της εφαπτόμενης της C_f σε κάθε σημείο της $(x, f(x))$, δίνεται από την παράγωγο τιμή της f άρα θα έχω $f'(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$

- Για $x \geq 0$ είναι $f'(x) = e^x \Leftrightarrow f'(x) = (e^x)' \Leftrightarrow f(x) = e^x + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$
- Για $x < 0$ είναι $f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) = (-e^{-x})' \Leftrightarrow f(x) = -e^{-x} + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$

Άρα $f(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \geq 0 \\ -e^{-x} + c_2, & x < 0 \end{cases}$ και αφού η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x_0 = 1$

θα είναι $f(1) = 0 \Leftrightarrow e^1 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -e$ (1)

Επειδή από υπόθεση έχω ότι η C_f δέχεται

εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της έχω ότι η f

είναι παρ/μη άρα και συνεχής σε κάθε σημείο

της, άρα και στο $x_0 = 0$

Σημείο αλλαγής τύπου

Άρα θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x} + c_2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + c_1) = e^0 + c_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -1 + c_2 = 1 - e$$

άρα $c_2 = 2 - e$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 - e, & x < 0 \end{cases}$$

Χρειάζομαι ακόμα μια ισότητα για να μπορέσω να υπολογίσω το c_2 . Θα εκμεταλλευτώ το ότι η C_f δέχεται εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της άρα f είναι παρ/μη άρα και συνεχής

Π.χ. 2) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g , δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f''(x) = g''(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(i) Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = g(x) + \kappa x + \lambda$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(ii) Αν επιπλέον $f(0) = g(0)$ και η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις $\alpha < 0 < \beta$ δείξτε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστο σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

Λύση

$\forall x \in \mathbb{R}$, έχω $f''(x) = g''(x) \Leftrightarrow (f'(x))' = (g'(x))' \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + \kappa$ με $\kappa \in \mathbb{R}$

Ακόμα $f'(x) = g'(x) + \kappa \Leftrightarrow (f(x))' = (g(x) + \kappa \cdot x)' \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \kappa x + \lambda$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

Άρα $\forall \chi \in \mathfrak{R}$ θα είναι $f(\chi) = g(\chi) + \kappa\chi + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathfrak{R}$ (1)

(ii) Για να δείξω ότι η C_f τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ σε ένα τουλάχιστο σημείο $\chi_o \in [\alpha, \beta]$,
αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει τουλάχιστο μια ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

Έχω $f(0) = g(0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g(0) + \kappa \cdot 0 + \lambda = g(0) \Rightarrow \lambda = 0$ άρα $f(\chi) = g(\chi) + \kappa\chi \quad \forall \chi \in \mathfrak{R}$

Έχω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (αφού f παρ/μη στο $\mathfrak{R}$)

1^η σκέψη Θ Bolzano

$$\text{και} \left\{ \begin{array}{l} f(\alpha) = g(\alpha) + \kappa \cdot \alpha \stackrel{g(\alpha)=0}{\Rightarrow} f(\alpha) = \kappa \cdot \alpha \\ f(\beta) = g(\beta) + \kappa \cdot \beta \stackrel{g(\beta)=0}{\Rightarrow} f(\beta) = \kappa \cdot \beta \end{array} \right\} \Rightarrow f(\alpha) \cdot f(\beta) = \kappa^2 \cdot \alpha\beta \leq 0 \left[\begin{array}{l} \text{αφού } \kappa^2 \geq 0 \\ \text{και } \alpha < 0 < \beta \end{array} \right]$$

Αν $\kappa = 0$ τότε έχω $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ και στο

$$\chi = \alpha \text{ και στο } \chi = \beta \quad (\text{A})$$

Αν $\kappa \neq 0$ τότε έχω $f(\alpha) \cdot f(\beta) = \kappa^2 \cdot \alpha\beta < 0$ οπότε εφαρμόζεται το Θεώρημα Bolzano

άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο $\chi_o \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\chi_o) = 0$ δηλ η C_f τέμνει τον άξονα

$$\chi'\chi \text{ σε ένα τουλάχιστο σημείο } \chi_o \in (\alpha, \beta) \quad (\text{B})$$

Από (A) και (B) έχω ότι η C_f τέμνει τον $\chi'\chi$ σε ένα τουλάχιστο $\chi_o \in [\alpha, \beta]$.

Π x 3) Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in (0, \pi)$ αν η συνάρτηση $f(\chi) = |2\chi^2 - \alpha\chi - \alpha^2| \sin \chi$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_o = \alpha$

Λύση

Παρατηρείστε ότι η τιμή $\chi = \alpha$ είναι ρίζα της

$2\chi^2 - \alpha\chi - \alpha^2$ και ότι υπάρχει απόλυτη τιμή άρα

1^η σκέψη ο ορισμός της παράγωγου τιμής

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_o = \alpha$ θα ισχύει $\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{f(\chi) - f(\alpha)}{\chi - \alpha} = f'(\alpha) \Leftrightarrow$

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{|2\chi^2 - \alpha\chi - \alpha^2| \sin \chi - 0}{\chi - \alpha} = f'(\alpha) \stackrel{0}{\Leftrightarrow} \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{|(2\chi + \alpha)(\chi - \alpha)| \sin \chi}{\chi - \alpha} = f'(\alpha)$$

$$\text{Για } \chi \rightarrow \alpha^+ \quad \text{έχω } |\chi - \alpha| = \chi - \alpha \quad \text{και} \quad \lim_{\chi \rightarrow \alpha^+} \frac{(\chi - \alpha)|2\chi + \alpha| \sin \chi}{\chi - \alpha} = f'(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha^+} (|2\chi + \alpha| \sin \chi) = f'(\alpha) \Leftrightarrow 3|\alpha| \sin \alpha = f'(\alpha) \stackrel{\alpha \in (0, \pi)}{\Leftrightarrow} 3\alpha \cdot \sin \alpha = f'(\alpha) \quad (1)$$

$$\text{Για } \chi \rightarrow \alpha^- \quad \text{έχω } |\chi - \alpha| = -(\chi - \alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{\chi \rightarrow \alpha^-} \frac{-(\chi - \alpha)|2\chi + \alpha| \sin \chi}{\chi - \alpha} = f'(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha^-} (-|2\chi + \alpha| \sin \chi) = f'(\alpha) \Leftrightarrow -3|\alpha| \sin \alpha = f'(\alpha) \stackrel{\alpha \in (0, \pi)}{\Leftrightarrow} -3\alpha \cdot \sin \alpha = f'(\alpha) \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2) έχω } 3\alpha \sin \alpha = -3\alpha \sin \alpha \Leftrightarrow 6\alpha \sin \alpha = 0 \stackrel{\alpha \in (0, \pi)}{\Leftrightarrow} \sin \alpha = 0 \stackrel{\alpha \in (0, \pi)}{\Leftrightarrow} \alpha = \pi/2$$

Π.4) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και κοίλη. Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

Λύση

Ενώ φαίνεται ότι στην ανίσωση έχω δύο μεταβλητές τις α, β ,
(επειδή υπάρχουν οι τιμές $f(\alpha), f(\beta)$ και $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$) θα ανα-
ζητήσω τις διαφορές $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)$ και $f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$
και θα εφαρμόσω δύο φορές το Θ.Μ.Τ.

$$\begin{aligned} \text{Θέλω να δείξω ότι } f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} &\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha)+f(\beta) \Leftrightarrow \\ f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha)+f(\beta) &\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (1) \end{aligned}$$

Προφανώς είναι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$

Έχω : f συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ (αφού είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$) } Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.
 f παρ/μη στο $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (από υπόθεση) } στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ άρα

$$\text{υπάρχει } \xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) = f'(\xi_1) \cdot \frac{\beta-\alpha}{2} \quad (2)$$

Ακόμα: f συνεχής στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ (αφού είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$) } Εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.
 f παρ/μη στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ (από υπόθεση) } στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ άρα

$$\text{υπάρχει } \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Rightarrow f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f'(\xi_2) \cdot \frac{\beta-\alpha}{2} \quad (3)$$

Έτσι από (1),(2),(3) αρκεί να δείξω ότι $\frac{\beta-\alpha}{2} \cdot f'(\xi_1) > \frac{\beta-\alpha}{2} \cdot f'(\xi_2) \xrightarrow{\frac{\beta-\alpha}{2} > 0} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \quad (A)$

Όμως η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και κοίλη άρα θα είναι $f' \searrow$

οπότε $(A) \Leftrightarrow \xi_1 < \xi_2$ που ισχύει αφού $\alpha < \xi_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta$

Π X 5) Να λυθούν οι εξισώσεις

(i) $5^x + 12^x = 13^x$

(ii) $e^{x-1} + x + \ln x = 2$

(iii) $e^{x^2} + x^2 = e^4 + 4$

Λύση

(i) Παρατηρώ ότι η τιμή $x=2$ επαληθεύει την εξίσωση αφού $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ άρα η εξίσωση $5^x + 12^x = 13^x$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα την $x=2$ (A)

$$\text{Έχω } 5^x + 12^x = 13^x \Leftrightarrow 5^x + 12^x - 13^x = 0 \Leftrightarrow \frac{5^x}{13^x} + \frac{12^x}{13^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1 = 0$$

Επειδή μετά θα θεωρήσω συνάρτηση της οποίας θα βρω τη μονοτονία "έφτιαξα" άθροισμα εκθετικών με το ίδιο είδος μονοτονίας

Θεωρώ την $f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη

$$\text{με } f'(x) = \left[\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1 \right]' = \left(\frac{5}{13}\right)^x \cdot \ln \frac{5}{13} + \left(\frac{12}{13}\right)^x \cdot \ln \frac{12}{13}$$

Όμως $0 < \frac{5}{13} < \frac{12}{13} < 1 \xrightarrow{\ln x \nearrow} \ln \frac{5}{13} < \ln \frac{12}{13} < 0$ και επειδή $\left(\frac{5}{13}\right)^x > 0$ και $\left(\frac{12}{13}\right)^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

θα έχω $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα θα είναι $f \searrow$ άρα η C_f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σ' ένα σημείο. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα (B)

Από (A) και (B) έχω ότι η εξίσωση $5^x + 12^x = 13^x$ έχει ακριβώς μία ρίζα την $x=2$.

(ii) Για την εξίσωση $e^{x-1} + x + \ln x = 2 \Leftrightarrow e^{x-1} + x + \ln x - 2 = 0$ έχω τον περιορισμό $x > 0$
 Παρατηρώ ότι η τιμή $x=1$ επαληθεύει την εξίσωση αφού $e^{1-1} + 1 + \ln 1 - 2 = 0$ άρα η εξίσωση $e^{x-1} + x + \ln x = 2$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα την $x=1$ (A)

Θεωρώ την $f(x) = e^{x-1} + x + \ln x - 2$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (e^{x-1} + x + \ln x - 2)' = e^{x-1} + 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad (\text{αφού } \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0 \text{ και } e^{x-1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$$

Άρα θα είναι $f \nearrow$ άρα η C_f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σ' ένα σημείο.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα (B)

Από (A) και (B) έχω ότι η εξίσωση $e^{x-1} + x + \ln x = 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα την $x=1$

(iii) Παρατηρώ ότι οι τιμές $x=-2, x=2$ επαληθεύουν την εξίσωση άρα έχω τουλάχιστο δύο ρίζες (A)

Θεωρώ την $f(x) = e^{x^2} + x^2 - e^4 - 4$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (e^{x^2} + x^2 - e^4 - 4)' = 2xe^{x^2} + 2x = 2x(e^{x^2} + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} + 1) = 0 \xrightarrow{e^{x^2} + 1 > 0} x = 0 \text{ και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} + 1) > 0 \xrightarrow{e^{x^2} + 1 > 0} x > 0$$

από το διπλανό πίνακα μεταβολών των προσήμων της $f'(x)$ βρίσκω ότι $f \searrow$ στο $(-\infty, 0]$ και $f \nearrow$ στο $[0, +\infty)$ άρα η C_f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε δύο σημεία. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες (B)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Από (A) και (B) έχω ότι η εξίσωση $e^{x^2} + x^2 = e^4 + 4$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x = -2$ και $x = 2$

Παρατηρήστε ότι σ' αυτού του είδους τις εξισώσεις όπου εμπλέκονται διαφορετικού τύπου συναρτήσεις (εκθετικές – λογαριθμικές – πολυωνυμικές – τριγωνομετρικές) και δεν μπορεί να τις επιλύσω με κάποιο **άλλο** τρόπο προσπαθώ να βρω τις προφανείς ρίζες και μετά με τη βοήθεια της μονοτονίας να δείξω ότι αυτές οι ρίζες είναι μοναδικές
(Ο **άλλος** τρόπος επίλυσης είναι να φέρεις όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και αφού κάνεις παραγοντοποίηση να εξισώσεις κάθε παράγοντα με το μηδέν (Δες μεθόδους Β' Λυκείου))

Π.Χ. 6) Να λυθούν οι ανισώσεις

$$(i) \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} + x^2 + x + 2 > x^3 \quad (A) \quad (ii) e^{\eta\mu x - 1} \geq \sqrt{2 - \eta\mu x} \quad (B)$$

Λύση

$$(i) \text{ Πρέπει } x \neq 1 \text{ και } \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} > 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^3 - 1) > 0 \quad (1)$$

Όμως $x^2 + x + 1 > 0$ (δευτεροβάθμιο τριώνυμο με $\Delta = -3 < 0$ και συντελεστή του x^2 το $1 > 0$)

$$\text{Άρα } (1) \Leftrightarrow x^3 > 1 \Leftrightarrow x > 1$$

$$(A) \stackrel{x^3-1>0}{\Leftrightarrow} \ln(x^2 + x + 1) - \ln(x^3 - 1) - x^3 + x^2 + x + 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) - \ln(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) - (x^3 - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) > \ln(x^3 - 1) + (x^3 - 1) \quad (II)$$

Θεωρώ την $f(\omega) = \ln \omega + \omega$ η οποία είναι συνεχής στο

$(0, +\infty)$ και παρ/μη με $f'(\omega) = \frac{1}{\omega} + 1 > 0 \quad \forall \omega \in (0, +\infty)$

οπότε $f \nearrow$ στο $(0, +\infty)$

$$\text{Άρα } (II) \Leftrightarrow f(x^2 + x + 1) > f(x^3 - 1) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 + x + 1 > x^3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 2 < 0 \stackrel{\text{σημια Horner}}{\Leftrightarrow} \underset{\text{με } \rho=2}{(x-2)(x^2 + x + 1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{x^2+x+1>0}{\Leftrightarrow} x < 2 \quad \text{άρα (λόγω περιορισμού) λύση της (A): } x \in (1, 2)$$

Παρατήρηση Όταν σε ανίσωση εμπλέκονται διαφορετικού τύπου συναρτήσεις, τότε

ή (α) φέρνω όλους τους όρους στο 1^ο μέλος $\rightarrow$ παραγοντοποιώ $\rightarrow$ βρίσκω το πρόσημο κάθε παράγοντα (πίνακας προσήμων)
ή (β) "χωρίζω" τις **παραστάσεις** με τον άγνωστο, (το πολύ) σε δύο ομάδες και φτάνω

$$\Pi(1^{\text{η}} \text{ ομάδα}) > \Pi(2^{\text{η}} \text{ ομάδα})$$

Μετά θεωρώ την συνάρτηση $f(\omega) = \Pi(\omega)$ και τη μελετώ ως προς τη μονοτονία

Προσοχή οι **παραστάσεις** να είναι "συμμετρικές"

(δηλ. να έχουν τις ίδιες συναρτήσεις !!!)

$$(ii) \text{ Πρέπει } 2 - \eta\mu x \geq 0 \text{ που ισχύει } \forall x \in \mathbb{R} \text{ (αφού } -1 \leq \eta\mu x \leq 1)$$

$$(B) \Leftrightarrow e^{\eta\mu x - 1} - \sqrt{2 - \eta\mu x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\eta\mu x - 1} - \sqrt{1 - (\eta\mu x - 1)} \geq 0 \quad (III)$$

Ο άγνωστος x επαναλαμβάνεται σε μία παράσταση

Θεωρώ την $f(\omega) = e^{\omega} - \sqrt{1 - \omega}$ η οποία είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$ και παρ/μη στο $(-\infty, 1)$

με $f'(\omega) = e^{\omega} + \frac{1}{2\sqrt{1 - \omega}} > 0 \quad \forall \omega \in (-\infty, 1)$, οπότε $f \nearrow$ στο $(-\infty, 1]$. Άρα

$$(III) \Leftrightarrow f(\eta\mu x - 1) \geq 0 \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(\eta\mu x - 1) \geq f(0) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu x - 1 \geq 0 \stackrel{-1 \leq \eta\mu x \leq 1}{\Leftrightarrow} \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Π.Χ. 7) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = \alpha$ Δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^{x^2} f(x) - e^{\alpha^2} f(\alpha)}{x - \alpha} = e^{\alpha^2} (f'(\alpha) - 2\alpha f(\alpha))$$

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0 = \alpha$ θα είναι και συνεχής στο $\chi_0 = \alpha$ άρα θα ισχύει $\lim_{\chi \rightarrow \alpha} f(\chi) = f(\alpha)$

Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{e^{\alpha^2} f(\chi) - e^{\chi^2} f(\alpha)}{\chi - \alpha} = \frac{e^{\alpha^2} f(\alpha) - e^{\alpha^2} f(\alpha)}{\alpha - \alpha} = \frac{0}{0}$

Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ όμως επειδή δεν γνωρίζω αν η f είναι παραγωγίσιμη κοντά στο α δεν μπορώ να εφαρμόσω κανόνα DE L'HOSPITAL

$$= \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{e^{\alpha^2} f(\chi) - e^{\chi^2} f(\alpha)}{\chi - \alpha} = \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{e^{\alpha^2} f(\chi) - e^{\chi^2} f(\alpha) - e^{\alpha^2} f(\chi) + e^{\alpha^2} f(\chi)}{\chi - \alpha} =$$

Παρατηρήστε την συμμετρία $e^{\alpha^2} f(\chi) \leftrightarrow e^{\chi^2} f(\alpha)$. Προσθαφαιρώ όρο που έχει μόνο το γράμμα α ή μόνο το γράμμα χ και ομαδοποιώ (κοίτα μεθόδους ορίων)

$$= \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{e^{\alpha^2} (f(\chi) - f(\alpha)) - f(\alpha) (e^{\chi^2} - e^{\alpha^2})}{\chi - \alpha} = \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \left[\frac{e^{\alpha^2} (f(\chi) - f(\alpha))}{\chi - \alpha} - \frac{f(\alpha) (e^{\chi^2} - e^{\alpha^2})}{\chi - \alpha} \right] \quad (1)$$

Επειδή η f είναι παρ/μη στο $\chi_0 = \alpha$

$$\text{έχω } \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{f(\chi) - f(\alpha)}{\chi - \alpha} = f'(\alpha) \quad (2)$$

$$\text{Ακόμα είναι } \lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{e^{\chi^2} - e^{\alpha^2}}{\chi - \alpha} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{DLH}{=}$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{(e^{\chi^2} - e^{\alpha^2})'}{(\chi - \alpha)'} = \lim_{\chi \rightarrow \alpha} 2\chi e^{\chi^2} = 2\alpha e^{\alpha^2} \quad (3)$$

Άρα από (1), (2), (3) έχω

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{e^{\alpha^2} f(\chi) - e^{\chi^2} f(\alpha)}{\chi - \alpha} = e^{\alpha^2} f'(\alpha) - f(\alpha) 2\alpha e^{\alpha^2} = e^{\alpha^2} (f'(\alpha) - 2\alpha f(\alpha))$$

Επειδή η f είναι παρ/μη στο $\chi_0 = \alpha$ έχω ότι υπάρχει το

$$\lim_{\chi \rightarrow \alpha} \frac{f(\chi) - f(\alpha)}{\chi - \alpha} = f'(\alpha) \text{ και}$$

γι αυτό χώρισα το κλάσμα

Π. 8) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$|f(\chi) - f(y)| \leq |\eta\mu(\chi - y) - (\chi - y)| \quad \forall \chi, y \in \mathbb{R} \text{ Δείξτε ότι η } f \text{ είναι σταθερή}$$

Λύση

Αρκεί να δείξω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι $f'(\chi) = 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$

$$\text{Έχω } |f(\chi) - f(y)| \leq |\eta\mu(\chi - y) - (\chi - y)| \stackrel{\substack{\text{για } \chi \neq y \\ \text{διακρίνω με} \\ |\chi - y| > 0}}{\Leftrightarrow} \left| \frac{f(\chi) - f(y)}{\chi - y} \right| \leq \left| \frac{\eta\mu(\chi - y)}{\chi - y} - 1 \right| \Leftrightarrow$$

$$- \left| \frac{\eta\mu(\chi - y)}{\chi - y} - 1 \right| \leq \frac{f(\chi) - f(y)}{\chi - y} \leq \left| \frac{\eta\mu(\chi - y)}{\chi - y} - 1 \right| \quad (1)$$

Έστω τυχαίο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ Θέτω στην (1) όπου y το χ_0 και έχω

$$- \left| \frac{\eta\mu(\chi - \chi_0)}{\chi - \chi_0} - 1 \right| \leq \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} \leq \left| \frac{\eta\mu(\chi - \chi_0)}{\chi - \chi_0} - 1 \right|$$

Δημιούργησα το λόγο $\frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0}$

γιατί θα τον χρειαστώ για την έδρεση της $f'(\chi)$

ΘΥΜΗΘΕΙΤΕ ότι η $f'(\chi)$ βρίσκεται **ή** με κανόνες παραγώγισης **ή** με τον ορισμό της παραγώγου

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \left[- \left| \frac{\eta\mu(\chi - \chi_0)}{\chi - \chi_0} - 1 \right| \right] \stackrel{\substack{\text{θέτω } \chi - \chi_0 = u \\ \text{αρά για } \chi \rightarrow \chi_0 \\ \text{έχω } u \rightarrow 0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \left[- \left| \frac{\eta\mu u}{u} - 1 \right| \right] = -|1 - 1| = 0$$

Όμοια έχω $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \left| \frac{\eta\mu(\chi - \chi_0)}{\chi - \chi_0} - 1 \right| = 0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα έχω

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} \frac{f(\chi) - f(\chi_0)}{\chi - \chi_0} = 0 \Leftrightarrow f'(\chi_0) = 0 \text{ για οποιοδήποτε } \chi_0 \in \mathbb{R} \text{ άρα}$$

$$f'(\chi) = 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R} \text{ άρα } f(\chi) = c \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Π.Χ. 9) Α) Να υπολογιστεί η παράγωγος της $g(\chi) = \frac{1}{4}e^{2\chi}(2\chi - 1)$
 Β) Δίνεται μη σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
 $f(\chi + y) = f(\chi) \cdot f(y) + \chi \cdot y \quad \forall \chi, y \in \mathbb{R}$
 (α) Δείξτε ότι η $f(0) = 1$
 (β) Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο $\chi_0 = 0$ τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
 (γ) Δείξτε ότι αν η f είναι παρ/μη στο $\chi_0 = 0$ τότε η f είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$
 (δ) Αν $f'(0) = 2$ να βρείτε τον τύπο της f

Λύση

$$A) \quad g'(\chi) = \left(\frac{1}{4}e^{2\chi}(2\chi - 1) \right)' \Rightarrow g'(\chi) = \frac{1}{4} \left[(e^{2\chi})'(2\chi - 1) + e^{2\chi}(2\chi - 1)' \right] = \chi e^{2\chi}, \chi \in \mathbb{R}$$

$$B) \quad (\alpha) \text{ Για } \chi = y = 0 \text{ έχω } f(0+0) = f(0) \cdot f(0) + 0 \cdot 0 \Rightarrow f(0) = f^2(0) \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0$$

$$\text{άρα } f(0) = 0 \text{ ή } f(0) = 1$$

Αν $f(0) = 0$ τότε για οποιοδήποτε $\chi \in \mathbb{R}$ και για $y = 0$ θα είναι

$$f(\chi + 0) = f(\chi) \cdot f(0) + \chi \cdot 0 \Rightarrow f(\chi) = f(\chi) \cdot 0 \Rightarrow f(\chi) = 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R} \text{ αδύνατο}$$

αφού η f δεν είναι σταθερή Άρα η τιμή $f(0) = 0$ απορρίπτεται άρα $f(0) = 1$

$$(\beta) \text{ Αφού η } f \text{ είναι συνεχής στο } \chi_0 = 0 \text{ θα έχω } \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = f(0) = 1$$

Για να δείξω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα δείξω ότι η f είναι συνεχής σε οποιοδήποτε $\chi_0 \in \mathbb{R}$ δηλ. ότι $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = f(\chi_0) \quad \forall \chi_0 \in \mathbb{R}$

Έστω τυχαίο $\chi_0 \in \mathbb{R}$ Για να υπολογίσω το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi)$ θέτω όπου $\chi = \chi_0 + h$ με $h \rightarrow 0$

$$\text{Έχω } \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\chi_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(\chi_0) \cdot f(h) + \chi_0 \cdot h) \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 1 \text{ (αφού } f \text{ συνεχής στο } \chi_0 = 0)$$

$$\text{άρα από (1) θα έχω } \lim_{\chi \rightarrow \chi_0} f(\chi) = f(\chi_0) \cdot 1 + \chi_0 \cdot 0 = f(\chi_0)$$

αφού λοιπόν η f είναι συνεχής στο τυχαίο $\chi_0 \in \mathbb{R}$

συμπεραίνω ότι η f θα είναι συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$

Θυμηθείτε ότι για να βρω το

$\lim_{x \rightarrow x_0} (...f(x)...) \quad \text{θέτω:}$

• $\chi = \chi_0 \pm h$ με $h \rightarrow 0$ αν έχω συναρτησιακή σχέση $f(\chi \pm y)$,

• $\chi = \chi_0 \cdot h$ με $h \rightarrow 1$ αν έχω συναρ/κή σχέση $f(\chi \cdot y)$ και

• $\chi = \chi_0 / h$ με $h \rightarrow 1$ αν έχω συναρτησιακή σχέση $f(\chi/y)$

(γ) Αφού η f είναι παρ/μη στο $\chi_o = 0$ θα είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - 1}{\chi} = f'(0)$ (2)

Για να δείξω ότι η f είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$ αρκεί να δείξω ότι είναι παρ/μη σε οποιοδήποτε $\chi_o \in \mathbb{R}$. Δηλ. αρκεί να δείξω ότι υπάρχει το $\lim_{\chi \rightarrow \chi_o} \frac{f(\chi) - f(\chi_o)}{\chi - \chi_o}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Θα υπολογίσω την $f'(\chi_o)$ με τον ορισμό αφού δεν μπορώ να εφαρμόσω κανόνες παραγώγισης

Για $\chi \rightarrow \chi_o$ θέτω $\chi = \chi_o + h$ με $h \rightarrow 0$ οπότε έχω:

$$\lim_{\chi \rightarrow \chi_o} \frac{f(\chi) - f(\chi_o)}{\chi - \chi_o} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_o + h) - f(\chi_o)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\chi_o) \cdot f(h) + \chi_o \cdot h - f(\chi_o)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(\chi_o) \cdot (f(h) - 1)}{h} - \chi_o \right) \stackrel{(2)}{=} f(\chi_o) \cdot f'(0) - \chi_o \in \mathbb{R}$$

Άρα $f'(\chi_o) = f(\chi_o) \cdot f'(0) - \chi_o$ για κάθε $\chi_o \in \mathbb{R}$, άρα $f'(\chi) = f(\chi) \cdot f'(0) - \chi \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$

(δ) Αφού $f'(0) = 2$ έχω $f'(\chi) = 2f(\chi) - \chi \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$

$$\text{άρα } 2f(\chi) - f'(\chi) = \chi \Leftrightarrow 2e^{2\chi} f(\chi) - e^{2\chi} f'(\chi) = e^{2\chi} \chi \Leftrightarrow$$

Θυμηθείτε την εύρεση αρχικής

$$(e^{2\chi})' f(\chi) - e^{2\chi} f'(\chi) = e^{2\chi} \chi \stackrel{(\text{Α ερώτημα})}{\Leftrightarrow} (e^{2\chi} f(\chi))' = \left(\frac{1}{4} e^{2\chi} (2\chi - 1) \right)' \Leftrightarrow$$

$$e^{2\chi} f(\chi) = \frac{1}{4} e^{2\chi} (2\chi - 1) + c \Rightarrow f(\chi) = \frac{(2\chi - 1)}{4} + \frac{c}{e^{2\chi}}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (3)$$

$$\text{Όμως } f(0) = 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \frac{-1}{4} + \frac{c}{1} = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{4} \quad \text{Άρα } f(\chi) = \frac{(2\chi - 1)}{4} + \frac{5}{4e^{2\chi}}$$

Π x 10) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\chi_o = 0$ για την οποία ισχύει:
 $f^2(\chi) + 4\chi f(\chi) = \chi^4 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$. Αν η f δεν έχει κρίσιμα σημεία να βρεθεί
 η εφαπτόμενη της C_f στο $\chi_o = 0$

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_o = 0$ θα υπάρχει η εφαπτόμενη της σ' αυτό το σημείο, άρα αρκεί να υπολογίσω το $f(0)$ και το $f'(0)$

$$\text{Για } \chi = 0 \text{ έχω } f^2(0) + 4 \cdot 0 \cdot f(0) = 0^4 \Rightarrow f(0) = 0$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_o = 0$ θα είναι

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi)}{\chi} = f'(0) \quad (1)$$

$$\text{Έχω } f^2(\chi) + 4\chi f(\chi) = \chi^4 \quad \begin{matrix} \text{για } \chi \neq 0 \\ \Rightarrow \\ \text{διαιρώ με } \chi^2 \end{matrix}$$

Παρατηρήστε ότι αν πρώτα παραγωγίσω και μετά, (θέτοντας όπου $\chi = 0$) αναζητήσω την $f'(0)$, δεν θα μπορέσω να την βρω

$$\frac{f^2(\chi)}{\chi^2} + 4 \frac{f(\chi)}{\chi} = \chi^2 \xRightarrow[\text{τετραγώνων}]{\text{Συμπλήρωμα}} \left(\frac{f(\chi)}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot 2 \frac{f(\chi)}{\chi} + 4 = \chi^2 + 4 \Rightarrow \left(\frac{f(\chi)}{\chi} + 2 \right)^2 = \chi^2 + 4$$

$$\text{άρα } \lim_{\chi \rightarrow 0} \left(\frac{f(\chi)}{\chi} + 2 \right)^2 = \lim_{\chi \rightarrow 0} (\chi^2 + 4) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (f'(0) + 2)^2 = 4 \begin{cases} f'(0) + 2 = 2 \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f'(0) + 2 = -2 \Rightarrow f'(0) = -4 \end{cases}$$

επειδή η f δεν έχει κρίσιμα σημεία η τιμή $f'(0) = 0$ απορρίπτεται άρα $f'(0) = -4$

Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $\chi_o = 0$ θα είναι

$$(\epsilon) \quad y - f(0) = f'(0)(\chi - 0) \Rightarrow y = -4\chi$$

Π x 11) Αν $f(\chi) = \alpha \chi \cdot e^{\alpha \chi}$, $\alpha \neq 0$ δείξτε ότι $f''(\chi) - 2\alpha f'(\chi) + \alpha^2 f(\chi) = 0 \quad \forall \chi \in \mathbb{R}$

Λύση

Έχω $f'(\chi) = (\alpha \chi \cdot e^{\alpha \chi})' = \alpha e^{\alpha \chi} + \alpha^2 \chi e^{\alpha \chi}$, $\chi \in \mathbb{R}$ και

$$f''(\chi) = (\alpha e^{\alpha \chi} + \alpha^2 \chi e^{\alpha \chi})' = \alpha^2 e^{\alpha \chi} + \alpha^2 e^{\alpha \chi} + \alpha^3 \chi e^{\alpha \chi} = 2\alpha^2 e^{\alpha \chi} + \alpha^3 \chi e^{\alpha \chi}, \chi \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f''(\chi) - 2\alpha f'(\chi) + \alpha^2 f(\chi) &= 2\alpha^2 e^{\alpha \chi} + \alpha^3 \chi e^{\alpha \chi} - 2\alpha(\alpha e^{\alpha \chi} + \alpha^2 \chi e^{\alpha \chi}) + \alpha^2(\alpha \chi e^{\alpha \chi}) = \\ &= 2\alpha^2 e^{\alpha \chi} + \alpha^3 \chi e^{\alpha \chi} - 2\alpha^2 e^{\alpha \chi} - 2\alpha^3 \chi e^{\alpha \chi} + \alpha^3 \chi e^{\alpha \chi} = 0 \end{aligned}$$

Π x 12) Να βρεθεί πολώνυμο $P(\chi)$ ώστε $P(\chi) - P'(\chi) = 2\chi^3 + \chi$

Λύση

Έστω πολώνυμο $-v$ -βαθμού: $P(\chi) = \alpha_v \chi^v + \alpha_{v-1} \chi^{v-1} + \dots + \alpha_1 \chi + \alpha_0$ με $\alpha_v \neq 0$ θα έχω

$$P'(\chi) = \chi \alpha_v \chi^{v-1} + (v-1) \alpha_{v-1} \chi^{v-2} + \dots + \alpha_1 \text{ δηλ. το } P'(\chi) \text{ είναι πολώνυμο } -v-1 \text{-βαθμού}$$

Άρα η διαφορά $P(\chi) - P'(\chi)$ θα είναι πολώνυμο $-v$ -βαθμού (A)

Όμως για να ισχύει η ισότητα $P(\chi) - P'(\chi) = 2\chi^3 + \chi$ θα πρέπει η διαφορά $P(\chi) - P'(\chi)$

να είναι πολώνυμο -3^{ov} -βαθμού (επειδή το πολώνυμο $2\chi^3 + \chi$ είναι 3^{ov} βαθμού)

άρα (A) $\Rightarrow v = 3$

$$\text{Άρα } P(\chi) = \alpha \chi^3 + \beta \chi^2 + \gamma \chi + \delta \text{ και } P'(\chi) = 3\alpha \chi^2 + 2\beta \chi + \gamma$$

$$\text{Άρα } P(\chi) - P'(\chi) = 2\chi^3 + \chi \Leftrightarrow \alpha \chi^3 + \beta \chi^2 + \gamma \chi + \delta - 3\alpha \chi^2 - 2\beta \chi - \gamma = 2\chi^3 + \chi \Leftrightarrow$$

$$\alpha \chi^3 + (\beta - 3\alpha) \chi^2 + (\gamma - 2\beta) \chi + \delta - \gamma = 2\chi^3 + \chi \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta - 3\alpha = 0 \\ \gamma - 2\beta = 1 \\ \delta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 6 \\ \gamma = 13 \\ \delta = 13 \end{cases}$$

Άρα το ζητούμενο πολώνυμο είναι το $P(\chi) = 2\chi^3 + 6\chi^2 + 13\chi + 13$

Π x 13) Δίνεται συνάρτηση f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\epsilon \phi \chi) = e^{\chi} - \sigma \nu \chi$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f στο $\chi_o = 0$.

Λύση

Αφού η f είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο $\chi_o = 0$) έχω ότι υπάρχει η ζητούμενη εφαπτόμενη (αρκεί να υπολογίσω τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$)

$$\text{Έχω } f(\varepsilon\phi\chi) = e^x - \sigma\nu\chi \xrightarrow{\chi=0} f(\varepsilon\phi 0) = e^0 - \sigma\nu 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\text{και } (f(\varepsilon\phi\chi))' = (e^x - \sigma\nu\chi)' \Rightarrow f'(\varepsilon\phi\chi)(\varepsilon\phi\chi)' = e^x + \eta\mu\chi \Rightarrow \frac{f'(\varepsilon\phi\chi)}{\sigma\nu^2\chi} = e^x + \eta\mu\chi$$

$$\text{απ' όπου για } \chi_o = 0 \text{ έχω } \frac{f'(\varepsilon\phi 0)}{\sigma\nu^2 0} = e^0 + \eta\mu 0 \Rightarrow f'(0) = 1$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτόμενη της C_f είναι η ευθεία

$$(\varepsilon) \quad y - f(0) = f'(0)(\chi - 0) \Rightarrow y - 0 = 1(\chi - 0) \Rightarrow y = \chi$$

Π x 14) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(\chi) = (\chi^2 - 4)\ln(\chi + 1)$ έχει τουλάχιστο μία οριζόντια εφαπτόμενη.

Λύση

Θα δείξω ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα χ_o τέτοιο ώστε $f'(\chi_o) = 0$
 μόν θυμίζει Θ Rolle οπότε ψάχνω τιμές α, β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$ ($= 0$ ως συν-
 ήθως αφού βρίσκονται εύκολα οι προφανείς ρίζες της $f(\chi)$) ($f(0) = f(2) = 0$)

Έχω $\text{ΠΟ}_f = (-1, +\infty)$ στο οποίο η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών

Θα δείξω ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\chi_o \in (-1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f'(\chi_o) = 0$

Έχω ότι η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών στο $[0, 2]$

$$\text{η } f \text{ είναι παρ/μη στο } (0, 2) \text{ με } f'(\chi) = [(\chi^2 - 4)\ln(\chi + 1)]' = 2\chi\ln(\chi + 1) + \frac{\chi^2 - 4}{\chi + 1}$$

Ακόμα $f(0) = f(2) = 0$ άρα εφαρμόζεται για την f το Θεώρημα Rolle στο $[0, 2]$

άρα υπάρχει $\chi_o \in (0, 2)$ ώστε $f'(\chi_o) = 0$ οπότε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(\chi_o, f(\chi_o))$ θα είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$ (οριζόντια)

Π x 15) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παρ/μη στο πεδίο ορισμού της, για την οποία ισχύουν (α) $f'(\chi) \geq \chi \ln \chi \quad \forall \chi \in (0, +\infty)$ και (β) η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(e, f(e))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = e\chi + 1$.
 Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της $f'(C_f)$ στο σημείο $(e, f'(e))$

Παρατήρηση

Μια άλλη σκέψη για την επίλυση του θέματος είναι να βρούμε το σύνολο τιμών της $f'(\chi)$ με τη βοήθεια της μονοτονίας – ακρότατων – οριακών τιμών (πολύ δύσκολο στο συγκεκριμένο παράδειγμα) Μεθοδολογία 5₂

Λύση

Αφού η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $(e, f(e))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = e\chi + 1$, θα έχω $f'(e) = e$ (1)

$$\text{Ακόμα έχω } f'(\chi) \geq \chi \ln \chi \Leftrightarrow f'(\chi) - \chi \ln \chi \geq 0 \quad \forall \chi \in (0, +\infty) \quad (2)$$

Θεωρώ την $h(\chi) = f'(\chi) - \chi \ln \chi$ η οποία είναι συνεχής και παρ/μη στο $(0, +\infty)$

$$(\text{αφού η } f \text{ είναι δύο φορές παρ/μη}) \text{ με } h'(\chi) = (f'(\chi) - \chi \ln \chi)' = f''(\chi) - \ln \chi - 1$$

$$\text{Παρατηρώ ότι } h(e) = f'(e) - e \ln e = e - e = 0 \text{ άρα } (2) \Leftrightarrow h(\chi) \geq h(e) \quad \forall \chi \in (0, +\infty)$$

άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $\chi_0 = e$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα *Fermat* θα ισχύει $h'(e) = 0 \Leftrightarrow f''(e) - \ln e - 1 = 0 \Leftrightarrow f''(e) = 2$ άρα η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f' ($C_{f'}$) στο σημείο $(e, f'(e)) = (e, e)$ θα είναι η ευθεία

$$(\epsilon) \quad y - f'(e) = f''(e)(\chi - e) \Leftrightarrow y - e = 2(\chi - e) \Leftrightarrow y = 2\chi - e$$

Π x 16) Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \sigma\nu\nu\lambda \cdot e^{\chi - \sigma\nu\nu\lambda} - \sigma\nu\nu\lambda \cdot (\chi + 1) + \eta\mu\lambda(1 - \eta\mu\lambda)$

(i) Δείξτε ότι η f έχει ακρότατο για κάθε τιμή του $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των ακρότατων καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση

(i) Έχω ότι η f ορίζεται $\forall \chi \in \mathbb{R}$ και ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(\chi) = (\sigma\nu\nu\lambda \cdot e^{\chi - \sigma\nu\nu\lambda} - \sigma\nu\nu\lambda \cdot (\chi + 1) + \eta\mu\lambda(1 - \eta\mu\lambda))' = \sigma\nu\nu\lambda \cdot e^{\chi - \sigma\nu\nu\lambda} - \sigma\nu\nu\lambda \Leftrightarrow$$

$$f'(\chi) = \sigma\nu\nu\lambda(e^{\chi - \sigma\nu\nu\lambda} - 1)$$

$$f'(\chi) = 0 \Leftrightarrow \sigma\nu\nu\lambda(e^{\chi - \sigma\nu\nu\lambda} - 1) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{για } \chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{έχω } \sigma\nu\nu\lambda > 0 \end{array} \Leftrightarrow e^{\chi - \sigma\nu\nu\lambda} = 1 \Leftrightarrow \chi - \sigma\nu\nu\lambda = 0 \Leftrightarrow \chi = \sigma\nu\nu\lambda$$

$$f'(\chi) > 0 \Leftrightarrow \sigma\nu\nu\lambda(e^{\chi - \sigma\nu\nu\lambda} - 1) > 0 \quad \begin{array}{l} \text{για } \chi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{έχω } \sigma\nu\nu\lambda > 0 \end{array} \Leftrightarrow e^{\chi - \sigma\nu\nu\lambda} > 1 \Leftrightarrow \chi - \sigma\nu\nu\lambda > 0 \Leftrightarrow \chi > \sigma\nu\nu\lambda$$

Από το διπλανό πίνακα μεταβολής των προσήμων της

$f'(\chi)$ βρίσκω τη μονοτονία και τα ακρότατα της f

Άρα η f παρουσιάζει ένα ακρότατο (ολικό

χ	$-\infty$	$\sigma\nu\nu\lambda$	$+\infty$
$f'(\chi)$	$-$	0	$+$
$f(\chi)$			

ελάχιστο) για κάθε τιμή του $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ στο σημείο $M(\sigma\nu\nu\lambda, f(\sigma\nu\nu\lambda))$

$$\text{Είναι } f(\sigma\nu\nu\lambda) = \sigma\nu\nu\lambda \cdot e^{\sigma\nu\nu\lambda - \sigma\nu\nu\lambda} - \sigma\nu\nu\lambda \cdot (\sigma\nu\nu\lambda + 1) + \eta\mu\lambda(1 - \eta\mu\lambda) =$$

$$\sigma\nu\nu\lambda - \sigma\nu\nu\lambda^2 - \sigma\nu\nu\lambda + \eta\mu\lambda - \eta\mu^2\lambda = \eta\mu\lambda - (\sigma\nu\nu\lambda^2 + \eta\mu^2\lambda) = \eta\mu\lambda - 1$$

άρα η f παρουσιάζει το ακρότατο στο σημείο $M(\sigma\nu\nu\lambda, \eta\mu\lambda - 1)$

(ii) Η τετμημένη του σημείου M είναι $\chi = \sigma\nu\nu\lambda$

Η τεταγμένη του σημείου M είναι $y = \eta\mu\lambda - 1 \Leftrightarrow \eta\mu\lambda = y + 1$

$$\text{Άρα } \left. \begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu^2\lambda = \chi^2 \\ \eta\mu^2\lambda = (y+1)^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \chi^2 + (y+1)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\lambda + \eta\mu^2\lambda \Rightarrow \chi^2 + (y+1)^2 = 1$$

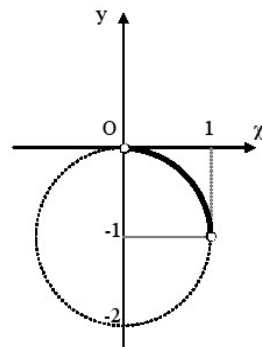
Θυμηθείτε ότι όταν οι συντεταγμένες (χ, y) ενός σημείου του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, έχουν βρεθεί ως συνάρτηση κάποιας παραμέτρου, τότε κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου. **Ειδικά** αν η παράμετρος βρίσκεται σε ημίτονο και συνημίτονο (εδώ $\eta\mu\lambda$, $\sigma\upsilon\nu\lambda$) τότε, πρώτα λύνω ως προς τα $\eta\mu\lambda$ - $\sigma\upsilon\nu\lambda$, και μετά, αφού υψώσω στο τετράγωνο, προσθέτω κατά μέλη.

που είναι κύκλος με κέντρο το $K(0, -1)$ και ακτίνα $\rho = 1$ (1)

Επειδή για $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχω $\sigma\upsilon\nu\lambda, \eta\mu\lambda \in (0, 1)$ συμπεραίνω ότι

$$\chi = \sigma\upsilon\nu\lambda \in (0, 1) \text{ και } y = \eta\mu\lambda - 1 \in (-1, 0) \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω ότι ο ζητούμενος Γεωμετρικός Τόπος των σημείων M (ακρότατων της f) είναι το τόξο του παραπάνω κύκλου τα σημεία του οποίου έχουν τετμημένη $\chi \in (0, 1)$ και τεταγμένη $y \in (-1, 0)$ (διπλανό σχήμα)



π.χ. 17) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ η οποία δεν έχει κρίσιμα σημεία. Δείξτε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $y = -1$ αν και μόνο αν

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi \cdot f(\chi) + 1}{f(\chi) - f(0)} = 1$$

Λύση

Αν η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -1 θα είναι $f(0) = -1$

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα έχω ότι η f και η f' είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $\chi_0 = 0$ άρα θα είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = f(0)$ και

$\lim_{\chi \rightarrow 0} f'(\chi) = f'(0)$ ($\neq 0$ αφού η f δεν έχει κρίσιμα σημεία) οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi \cdot f(\chi) + 1}{f(\chi) - f(0)} &= \frac{\sigma\upsilon\nu 0 \cdot f(0) + 1}{f(0) - f(0)} = \frac{-1 + 1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{μορφή } \frac{0}{0} \\ &\stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\sigma\upsilon\nu\chi \cdot f(\chi) + 1)'}{(f(\chi) - f(0))'} = \\ &= \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu\chi \cdot f(\chi) + \sigma\upsilon\nu\chi \cdot f'(\chi)}{f'(\chi)} = \frac{-\eta\mu 0 \cdot f(0) + \sigma\upsilon\nu 0 \cdot f'(0)}{f'(0)} = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1 \end{aligned}$$

Αντιστρόφως θα δείξω ότι αν $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi \cdot f(\chi) + 1}{f(\chi) - f(0)} = 1$ τότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -1 δηλ. ότι $f(0) = -1$

Ονομάζω $\frac{\sigma\upsilon\nu\chi \cdot f(\chi) + 1}{f(\chi) - f(0)} = h(\chi)$ (1) και έχω $\lim_{\chi \rightarrow 0} h(\chi) = 1$

Ακόμα (1) $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi \cdot f(\chi) + 1 = (f(\chi) - f(0)) \cdot h(\chi) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{\chi \rightarrow 0} (\sigma\nu\chi \cdot f(\chi) + 1) &= \lim_{\chi \rightarrow 0} ((f(\chi) - f(0)) \cdot h(\chi)) \stackrel{\substack{\text{αφού } f \text{ συνεχής} \\ \lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = f(0)}}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \sigma\nu 0 \cdot f(0) + 1 = (f(0) - f(0)) \cdot 1 \Rightarrow f(0) = -1 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος για το αντίστροφο

Λύνοντας την (1) πλήρως ως προς $f(\chi)$ καταλήγω στη $f(\chi) = \frac{f(0) \cdot h(\chi) + 1}{h(\chi) - \sigma\nu\chi}$

- Αν $f(0) \neq -1$ τότε

$$\text{επειδή} \quad \lim_{\chi \rightarrow 0} (f(0) \cdot h(\chi) + 1) \stackrel{\lim_{\chi \rightarrow 0} h(\chi) = 1}{=} f(0) + 1 \neq 0 \quad \text{και}$$

Παραμετρική
με παράμετρο
το $f(0)$

$\lim_{\chi \rightarrow 0} (h(\chi) - \sigma\nu\chi) = 1 - 1 = 0$ θα είχα ότι το $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi)$ ή δεν υπάρχει ή αν υπάρχει δεν θα είναι πραγματικός αριθμός, αδύνατο σε κάθε περίπτωση, αφού θα έπρεπε να είναι $\lim_{\chi \rightarrow 0} f(\chi) = f(0) \in \mathbb{R}$ (από υπόθεση έχω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα συνεχής)

- Άρα θα έχω $f(0) = -1$

Π x 18) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Δείξτε ότι αν η C_f τέμνει την πρώτη διχοτόμο των αξόνων σε τρία διαφορετικά σημεία $A(\chi_1, f(\chi_1))$, $B(\chi_2, f(\chi_2))$, $\Gamma(\chi_3, f(\chi_3))$ με $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$ τότε η παράγωγος συνάρτηση της f (δηλ. η $f'(\chi)$) έχει τουλάχιστο ένα κρίσιμο σημείο.

Λύση

Θα δείξω ότι η παράγωγος της $f'(\chi)$ (δηλ. η $f''(\chi)$) μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστο σημείο. Δηλ. θα δείξω ότι υπάρχει χ_o τέτοιο ώστε $f''(\chi_o) = 0$

Αφού η C_f τέμνει την πρώτη διχοτόμο των αξόνων στα σημεία $A(\chi_1, f(\chi_1))$, $B(\chi_2, f(\chi_2))$, $\Gamma(\chi_3, f(\chi_3))$ θα είναι $f(\chi_1) = \chi_1$, $f(\chi_2) = \chi_2$, $f(\chi_3) = \chi_3$ (1)

$$\text{Έχω} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [\chi_1, \chi_2] \text{ (αφού από υπόθεση } f \text{ παρ/μη)} \\ f \text{ παρ/μη στο } (\chi_1, \chi_2) \end{array} \right\} \stackrel{\Theta_{MT}}{\Rightarrow} \exists \xi_1 \in (\chi_1, \chi_2) \text{ ώστε}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\chi_2) - f(\chi_1)}{\chi_2 - \chi_1} \stackrel{(1)}{=} \frac{\chi_2 - \chi_1}{\chi_2 - \chi_1} = 1 \quad (\alpha)$$

$$\text{Έχω} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [\chi_2, \chi_3] \text{ (αφού από υπόθεση } f \text{ παρ/μη)} \\ f \text{ παρ/μη στο } (\chi_2, \chi_3) \end{array} \right\} \stackrel{\Theta_{MT}}{\Rightarrow} \exists \xi_2 \in (\chi_2, \chi_3) \text{ ώστε}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\chi_3) - f(\chi_2)}{\chi_3 - \chi_2} \stackrel{(1)}{=} \frac{\chi_3 - \chi_2}{\chi_3 - \chi_2} = 1 \quad (\beta)$$

$$\text{Έχω: } \left\{ \begin{array}{l} f' \text{ συνεχής στο } [\xi_1, \xi_2] \text{ (αφού από υπόθεση υπάρχει η } f''(\chi)) \\ f' \text{ παρ/μη στο } (\xi_1, \xi_2) \text{ (αφού από υπόθεση υπάρχει η } f''(\chi)) \\ f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1 \text{ (από (α) και (β))} \end{array} \right\} \xRightarrow{\ominus \text{ Rolle}} \exists \chi_0 \in (\xi_1, \xi_2)$$

ώστε $f''(\chi_0) = 0$ οπότε το χ_0 είναι κρίσιμο σημείο για την f'

Π x 19) Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής χ μονάδων ενός προϊόντος σε μια επιχείρηση που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο $K(\chi) = \chi^3 - 6\nu\chi^2 + 6\nu^3$, ενώ η τιμή πώλησης κάθε προϊόντος είναι $T = 20 - \nu - \frac{13\nu\chi}{8}$. Να βρείτε πόσα προϊόντα πρέπει να παράγει η επιχείρηση και πόσους εργάτες να απασχολεί ώστε να έχει το ελάχιστο κόστος και το μέγιστο κέρδος

Λύση

$$\text{Είναι } K(\chi) = \chi^3 - 6\nu\chi^2 + 6\nu^3, \chi > 0 \text{ άρα } K'(\chi) = (\chi^3 - 6\nu\chi^2 + 6\nu^3)' = 3\chi^2 - 6\nu\chi \Leftrightarrow \\ K'(\chi) = 3\chi(\chi - 4\nu), \chi > 0$$

$$K'(\chi) = 0 \Leftrightarrow 3\chi(\chi - 4\nu) = 0 \xrightarrow{\chi > 0} \chi = 4\nu \text{ και } K'(\chi) > 0 \Leftrightarrow 3\chi(\chi - 4\nu) > 0 \xrightarrow{\chi > 0} \chi > 4\nu$$

Από το διπλανό πίνακα μεταβολής των προσήμων της $K'(\chi)$ βρίσκω τη μονοτονία και τα ακρότατα του κόστους $K(\chi)$. Βλέπω λοιπόν ότι το κόστος γίνεται ελάχιστο όταν ημερησίως παράγονται 4ν

χ	0	4ν	$+\infty$
$K'(\chi)$	-	0	+
$K(\chi)$			

προϊόντα (δηλ. το πλήθος των παραγόμενων προϊόντων είναι τετραπλάσιο από τους εργάτες). Όταν το κόστος είναι ελάχιστο (δηλ. $\chi = 4\nu$) η τιμή πώλησης κάθε προϊόντος διαμορφώνεται στη $T = 20 - \nu - \frac{13\nu\chi}{8} \xrightarrow{\chi=4\nu} T = 20 - \nu - \frac{13\nu^2}{2}$ και τα έσοδα (τα συμβολίζω E) από

$$\text{την πώληση και των } \chi \text{ (-όλων των-) προϊόντων θα είναι } E = \chi \cdot T = 4\nu \left(20 - \nu - \frac{13\nu^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$E = 80\nu - 4\nu^2 - 26\nu^3, \text{ άρα το κέρδος (το συμβολίζω } \Delta) \text{ θα είναι } \Delta = E - K \Rightarrow$$

$$\Delta = (80\nu - 4\nu^2 - 26\nu^3) - (\chi^3 - 6\nu\chi^2 + 6\nu^3) \xrightarrow{\chi=4\nu} = 80\nu - 4\nu^2 - 26\nu^3 - 64\nu^3 + 96\nu^3 - 6\nu^3 \Rightarrow$$

$$\Delta(\nu) = 80\nu - 4\nu^2, \nu > 0$$

$$\text{Είναι } \Delta'(\nu) = (80\nu - 4\nu^2)' = 80 - 8\nu, \nu > 0$$

$$\Delta'(\nu) = 0 \Leftrightarrow 80 - 8\nu = 0 \Leftrightarrow \nu = 10 \text{ και } \Delta'(\nu) > 0 \Leftrightarrow 80 - 8\nu > 0 \Leftrightarrow \nu < 10$$

Από το διπλανό πίνακα μεταβολής των προσήμων

της $\Delta'(\nu)$ βρίσκω τη μονοτονία και τα ακρότατα

του κέρδους $\Delta(\nu)$. Βλέπω λοιπόν ότι το κέρδος γί-

νεται μέγιστο όταν απασχολούνται $\nu = 10$ εργάτες

ν	0	10	$+\infty$
$\Delta'(\nu)$	+	0	-
$\Delta(\nu)$			

Άρα για να έχει η επιχείρηση το ελάχιστο κόστος και το μέγιστο κέρδος, θα πρέπει να προσλάβει $\nu = 10$ εργάτες οι οποίοι θα παράγουν ημερησίως $\chi = 4 \cdot 10 = 40$ προϊόντα.

Π.Χ. 20) Δίνεται συνάρτηση f παρ/μη στο $\chi_0 = 0$ για την οποία ισχύει $f(0) = f'(0) = 2$

Να υπολογίσετε το $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f^2(\chi) - \eta\mu\chi - 4}{\chi}$

Λύση

$$\text{Έχω } f'(0) = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} \Rightarrow 2 = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - 2}{\chi}$$

$$\text{Ονομάζω } \frac{f(\chi) - 2}{\chi} = h(\chi) \Leftrightarrow f(\chi) = \chi \cdot h(\chi) + 2$$

$$\text{και έχω } \lim_{\chi \rightarrow 0} h(\chi) = 2 \quad \text{Άρα} \quad \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f^2(\chi) - \eta\mu\chi - 4}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\chi \cdot h(\chi) + 2)^2 - \eta\mu\chi - 4}{\chi} =$$

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\chi^2 \cdot h^2(\chi) + 4\chi \cdot h(\chi) + 4 - \eta\mu\chi - 4}{\chi} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \left[\chi \cdot h^2(\chi) + 4h(\chi) - \frac{\eta\mu\chi}{\chi} \right] = 0 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 7$$

Θυμηθείτε ότι για να υπολογίσω ένα όριο με μια f χρειάζομαι ή τον τύπο της f , ή δοσμένο (άλλο) όριο με την f , ή ανισοτική σχέση με την f , ή συναρτησιακή σχέση με την f . Εδώ (επειδή η f είναι

παρ/μη στο $\chi_0 = 0$) έχω $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{f(\chi) - f(0)}{\chi - 0} = f'(0)$

Π.Χ. 21) Στον πρώτο πίνακα κάθε σύμβολο της στήλης Α αντιστοιχίζεται σ' ένα σύμβολο της στήλης Β με το οποίο έχει την ίδια σημασία. Συμπληρώστε τον 2° πίνακα ώστε να είναι σωστή η αντιστοίχιση.

1^{ος} ΠΙΝΑΚΑΣ

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$	α. $f'(x)$
2. $\frac{df^2}{dt}$	β. $f''(t)$
3. $\frac{d^2 f}{dt^2}$	γ. $2f(t) \cdot f'(t)$
4. $\left(\frac{df}{dt}\right)^2$	δ. $(f'(t))^2$
5. $\frac{df}{dx}$	ε. $f'(t)$

2^{ος} ΠΙΝΑΚΑΣ

1	2	3	4	5

Λύση

Υπενθύμιση το πηλίκο $\frac{df}{dt}$ συμβολίζει την $f'(t)$ άρα $5 \rightarrow \alpha$

το πηλίκο $\frac{d^v f}{dt^v}$ συμβολίζει την $f^{(v)}(t)$ άρα $3 \rightarrow \beta$

Σχόλιο είναι $\frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dt} = f'(t)$ άρα $1 \rightarrow \varepsilon$

Ακόμα $\frac{df^2}{dt} = (f^2(t))' = 2f(t) \cdot f'(t)$ άρα $2 \rightarrow \gamma$

και $\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = (f'(t))^2$ άρα $4 \rightarrow \delta$

Άρα ο 2^{ος} πίνακας συμπληρώνεται :

2^{ος} ΠΙΝΑΚΑΣ

1	2	3	4	5
ε	γ	β	δ	α

- Π.χ. 22) (Α) Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x + e^x - x$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την ευθεία $y=1$
 (Β) Αν για την $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ισχύει $g(\ln x + e^x - 1) = \ln g(x) + e^{g(x)} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (I), δείξτε ότι η C_g έχει ένα τουλάχιστο κοινό σημείο με την $y=x$

Λύση

(Α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = (0, +\infty)$

Θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln x + e^x - x - 1 = 0$ (I) έχει ακριβώς μία λύση

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = \ln x + e^x - x - 1$ η οποία ορίζεται στο $(0, +\infty)$, είναι

συνεχής σ' αυτό το διάστημα και παρ/μη με $h'(x) = \frac{1}{x} + e^x - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1 + xe^x - x}{x}, x > 0$$

Δυσκολεύομαι να βρώ τα πρόσημα του αριθμητή, οπότε θα μελετήσω την $K(x) = 1 + xe^x - x$

Θα προσπαθήσω να το δείξω με τη βοήθεια της μονοτονίας - ακροτάτων - οριακών τιμών
Θυμηθείτε τη μέθοδο 8₃

Θεωρώ την $K(x) = 1 + xe^x - x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παρ/μη με

$$K'(x) = e^x + xe^x - 1$$

$$K''(x) = 2e^x + xe^x > 0 \quad \forall x > 0$$

Υπάρχει ακόμα δυσκολία στα πρόσημα θα βρώ την $K''(x)$

Από τον παρακάτω πίνακα προσήμων έχω:

x	0	$+\infty$
$K''(x)$		+
$K'(x)$	0	+
$K(x)$	1	+
$h'(x)$		+
$h(x)$		+

Αφού $K''(x) > 0$ θα έχω $K' \nearrow$, άρα για $x > 0 \Rightarrow$

$K'(x) > K'(0) = 0$ οπότε και $K \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

επομένως για $x > 0$ θα έχω $K(x) > K(0) = 1 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{K(x)}{x} > 0 \Rightarrow h \nearrow \text{ στο } (0, +\infty) \text{ άρα η}$$

$h(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, +\infty)$ (α)

$$\text{Ακόμα } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x + e^x - x - 1) = -\infty + 1 - 0 - 1 = -\infty$$

και $h(1) = e - 2 > 0$. Οπότε $h((0, 1]) = (-\infty, e - 2]$ και αφού h συνεχής έχω ότι η εξίσωση

$h(x) = 0$ έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο $(0, 1)$ (β)

Από (α) και (β) έχω ότι η (I) έχει ακριβώς μια λύση, την $x_0 \in (0, 1)$

(Β) Θα δείξω ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα x_0 ώστε $g(x_0) = x_0$

$$\text{Έχω } g(\ln x + e^x - 1) = \ln g(x) + e^{g(x)} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(\ln x + e^x - x + x - 1) = \ln g(x) + e^{g(x)} - g(x) + g(x) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(f(x) + x - 1) = f(g(x)) + g(x) - 1 \Rightarrow \text{(όπου } x_0 \text{ η λύση της (I))}$$

$$\Rightarrow g(f(x_0) + x_0 - 1) = f(g(x_0)) + g(x_0) - 1 \Rightarrow$$

Παρατηρήστε ότι δεν γνωρίζω αν η g είναι συνεχής, οπότε το μόνο που μπορώ να κάνω από τις μεθόδους της 8₁ είναι η εύρεση προφανούς
Ακόμα προσέξτε ότι η δοσμένη σχέση (I) της g μου θυμίζει την f και μάλλον δεν είναι τυχαίο ότι βρήκα ρίζα της (I)

$$\Rightarrow g(x_0) = f(g(x_0)) + g(x_0) - 1 \xrightarrow{f(x_0)=1} f(g(x_0)) = f(x_0) \xrightarrow[\text{αφού } f \text{ } \nearrow]{f \text{ "1-1"}} g(x_0) = x_0$$

Π x 23) Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$ και με $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f είναι σταθερή ως προς τα κοίλα.

Λύση

Θα δείξω ότι η $f''(x)$ διατηρεί
σταθερό πρόσημο στο (α, β)
Θυμηθείτε από θεωρήματα συνέχειας
(θεώρημα Bolzano) ανάλογη άσκηση

Έστω ότι η C_f δεν είναι σταθερή ως προς τα κοίλα

Δηλ. έστω ότι υπάρχουν διάστημα $[\delta_1, \delta_2] \subset [\alpha, \beta]$ στο οποίο η C_f είναι κυρτή (οπότε $f''(x) > 0 \forall x \in [\delta_1, \delta_2]$) και διάστημα $[\delta_3, \delta_4] \subset [\alpha, \beta]$ στο οποίο η C_f είναι κοίλη (οπότε $f''(x) < 0 \forall x \in [\delta_3, \delta_4]$)

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (\delta_1, \delta_2)$ και $\xi_2 \in (\delta_3, \delta_4)$ ώστε $f''(\xi_1) > 0$ και $f''(\xi_2) < 0$

Έχω

f'' συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ (αφού από υπόθεση f'' συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα και στο $[\xi_1, \xi_2] \subset [\alpha, \beta]$)
 $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την $f''(x)$ στο $[\xi_1, \xi_2]$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$ Αδύνατο αφού $f''(x) \neq 0 \forall x \in (\alpha, \beta)$

Άρα η $f''(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α, β) οπότε η C_f είναι σταθερή ως προς τα κοίλα

Π x 24) (I) Δείξτε ότι η εξίσωση $\ln x + x = 1$ έχει μόνο μία ρίζα
(II) Να βρείτε, αν υπάρχει, την κοινή εφαπτόμενη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = \ln x + 1$, $g(x) = 1 - 2\sqrt{-x}$

Λύση

(I) Παρατηρώ ότι η τιμή $x=1$ επαληθεύει την $\ln x + x = 1$ άρα η παραπάνω εξίσωση έχει τουλάχιστο μία ρίζα (A)

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = \ln x + x - 1$

Η h ορίζεται για $x \in (0, +\infty)$ και είναι συνεχής και παρ/μη σ' αυτό το διάστημα με

$h'(x) = \frac{1}{x} + 1$ Προφανώς $h'(x) > 0$ (αφού $x > 0$) άρα $h \nearrow$ άρα η εξίσωση

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + x = 1$ έχει το πολύ μία ρίζα (B)

Από (A), (B) έχω ότι η εξίσωση $\ln x + x = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα την $x=1$

(II) Η f ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και είναι συνεχής και παρ/μη με $f'(\chi) = \frac{1}{\chi}$, $\chi > 0$

άρα υπάρχει η εφαπτόμενη της C_f σε κάθε σημείο της $(\chi_1, f(\chi_1))$ με $\chi_1 > 0$

Η g ορίζεται στο $(-\infty, 0]$ και είναι συνεχής σ' αυτό το διάστημα

Ακόμα $g'(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-\chi}}$, $\chi < 0$ άρα υπάρχει η εφαπτόμενη της C_g σε κάθε σημείο της $(\chi_2, g(\chi_2))$ με $\chi_2 < 0$

Έστω ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτόμενη την (ε) . Τότε η (ε) θα εφάπτεται της C_f σε σημείο $A(\chi_1, f(\chi_1))$ με $\chi_1 > 0$ και της C_g σε σημείο της $B(\chi_2, g(\chi_2))$ με $\chi_2 < 0$. Προφανώς θα είναι $\chi_1 \neq \chi_2$ αφού $\chi_1 > 0 > \chi_2$.

Έχω ότι η (ε) είναι κοινή εφαπτόμενη των C_f

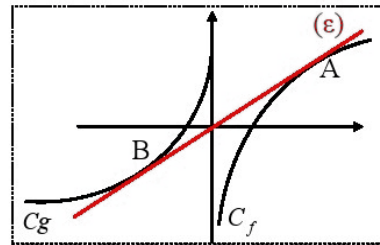
και C_g αν και μόνο αν η κλίση της C_f στο

$A(\chi_1, f(\chi_1))$ είναι ίση με την κλίση της C_g στο

$B(\chi_2, g(\chi_2))$ και ίση με την κλίση του ευθύγραμ-

μου τμήματος AB.

(Βλέπε σχήμα)



$$\Delta\eta\lambda. \quad f'(\chi_1) = g'(\chi_2) = \frac{f(\chi_1) - g(\chi_2)}{\chi_1 - \chi_2} \Leftrightarrow \frac{1}{\chi_1} = \frac{1}{\sqrt{-\chi_2}} = \frac{\ln \chi_1 + 2\sqrt{-\chi_2}}{\chi_1 - \chi_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi_1 = \sqrt{-\chi_2} \\ \frac{1}{\chi_1} = \frac{\ln \chi_1 + 2\chi_1}{\chi_1(\chi_1 + 1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_1 = \sqrt{-\chi_2} \\ \ln \chi_1 + \chi_1 = 1 \end{cases} \stackrel{(I)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \chi_2 = -1 \\ \chi_1 = 1 \end{cases}$$

Άρα η εφαπτόμενη της C_f στο $A(1, f(1)) \equiv A(1, 1)$ ταυτίζεται με την εφαπτόμενη της

C_g στο $B(-1, g(-1)) \equiv B(-1, -1)$

Η κοινή αυτή εφαπτόμενη είναι η (ε) : $y - f(1) = f'(1) \cdot (\chi - 1) \Leftrightarrow y = \chi$

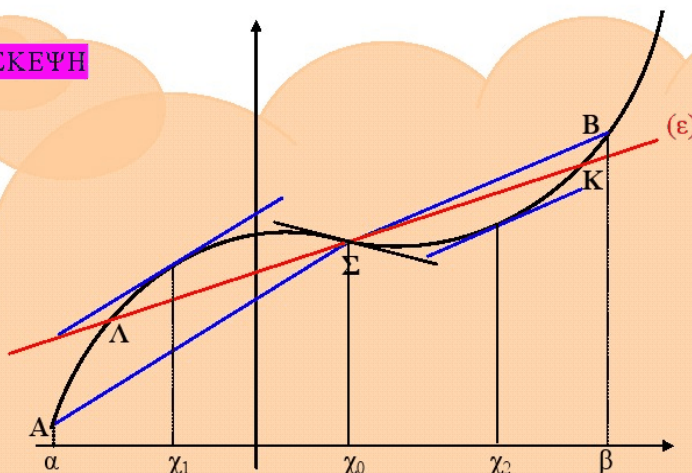
Η παραπάνω ευθεία είναι και η μοναδική κοινή εφαπτόμενη των C_f και C_g αφού

από (I) έχω ότι η εξίσωση $\ln \chi_1 + \chi_1 = 1$ έχει μοναδική λύση την $\chi_1 = 1$

- Π x 25) (A) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η οποία παρουσιάζει καμπή στο $\chi_0 \in \Delta$. Δείξτε ότι υπάρχει ευθεία (ε) : $y = \lambda \chi + \beta$ που περνάει από το σημείο καμπής και τέμνει τη C_f σε δύο ακόμα σημεία.
- (B) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ για την οποία ισχύει: Για οποιαδήποτε $\chi_1, \chi_2 \in \Delta$ υπάρχει μοναδικό $\mu \in \Delta$ ώστε να ισχύει $f(\chi_1) - f(\chi_2) = f'(\mu) \cdot (\chi_1 - \chi_2)$. Δείξτε ότι η C_f δεν παρουσιάζει καμπή

Λύση

(A) ΣΚΕΨΗ



Στο παραπάνω σχήμα η κλίση της C_f στο σημείο Σ είναι $f'(\chi_0)$

Η κλίση λ της ευθείας (ε) που περνάει από το Σ και τέμνει τη C_f στα σημεία K και Λ έχει κλίση μεγαλύτερη από την κλίση της C_f στο σημείο Σ και μικρότερη της κλίσης του ευθύγραμμου τμήματος $A\Sigma$ και του τμήματος ΣB άρα $\lambda > f'(\chi_0)$ (1) και $\lambda < \min\left\{\frac{f(\alpha)-f(\chi_0)}{\alpha-\chi_0}, \frac{f(\beta)-f(\chi_0)}{\beta-\chi_0}\right\}$

Όμως από ΘΜΤ $\rightarrow \frac{f(\alpha)-f(\chi_0)}{\alpha-\chi_0} = f'(\chi_1)$ και $\frac{f(\beta)-f(\chi_0)}{\beta-\chi_0} = f'(\chi_2)$ άρα $\lambda < \min\{f'(\chi_1), f'(\chi_2)\}$ (2)

Από (1) και (2) $\rightarrow \lambda \in (f'(\chi_0), \min\{f'(\chi_1), f'(\chi_2)\})$

Έστω $\Sigma(\chi_0, f(\chi_0))$ το σημείο καμπής

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρώ ότι η f είναι κοίλη κάτω από το $\Sigma(\chi_0, f(\chi_0))$

και κυρτή πάνω από το $\Sigma(\chi_0, f(\chi_0))$ άρα υπάρχει διάστημα

$[\alpha, \chi_0]$ με $f''(\chi) < 0 \quad \forall \chi \in [\alpha, \chi_0]$ και διάστημα $(\chi_0, \beta]$ με $f''(\chi) > 0 \quad \forall \chi \in (\chi_0, \beta]$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \chi_0]$ και $[\chi_0, \beta]$ έχω ότι

υπάρχουν $\chi_1 \in (\alpha, \chi_0)$ και $\chi_2 \in (\chi_0, \beta)$ ώστε

$$\frac{f(\alpha)-f(\chi_0)}{\alpha-\chi_0} = f'(\chi_1) \Leftrightarrow f(\alpha)-f(\chi_0) = f'(\chi_1) \cdot (\alpha-\chi_0) \quad (\alpha)$$

$$\frac{f(\beta)-f(\chi_0)}{\beta-\chi_0} = f'(\chi_2) \Leftrightarrow f(\beta)-f(\chi_0) = f'(\chi_2) \cdot (\beta-\chi_0) \quad (\beta)$$

Θεωρώ την ευθεία $(\varepsilon): y - f(\chi_0) = \lambda(\chi - \chi_0) \Leftrightarrow y = \lambda\chi - \lambda\chi_0 + f(\chi_0)$ που διέρχεται από το

$\Sigma(\chi_0, f(\chi_0))$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ με $f'(\chi_0) < \lambda < \min\{f'(\chi_1), f'(\chi_2)\}$ (1)

Θα δείξω ότι η παραπάνω ευθεία έχει με την C_f δύο ακόμα κοινά σημεία (επιπλέον του Σ)

δηλ. θα δείξω ότι η εξίσωση $f(\chi) = \lambda\chi - \lambda\chi_0 + f(\chi_0)$ έχει ρίζες $\xi_1 \neq \xi_2 \neq \chi_0 \neq \xi_1$

(για την ακρίβεια $\xi_1 < \chi_0 < \xi_2$)

Θεωρώ την $h(\chi) = f(\chi) - \lambda\chi + \lambda\chi_0 - f(\chi_0)$

Είναι $h'(\chi) = f'(\chi) - \lambda$ και $h''(\chi) = f''(\chi)$

Για τα πρόσημα των $h'(\chi) = f'(\chi) - \lambda$ και $h''(\chi) = f''(\chi)$ έχω

$$h''(\chi) < 0, \chi < \chi_0 \text{ και } h''(\chi) > 0, \chi > \chi_0$$

$$\text{Ακόμα } h'(\chi_0) = f'(\chi_0) - \lambda < 0 \quad (\text{από (1)})$$

$$h'(\chi_1) = f'(\chi_1) - \lambda > 0 \quad (\text{από (1)})$$

$$h'(\chi_{20}) = f'(\chi_2) - \lambda > 0 \quad (\text{από (1)})$$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano έχω ότι
υπάρχουν $\rho_1 \in (\chi_1, \chi_0)$ και $\rho_2 \in (\chi_0, \chi_2)$ ώστε
 $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$

Από τα παραπάνω φτιάχνω τον πίνακα που ακολουθεί

χ	α	χ_1	ρ_1	χ_0	ρ_2	χ_2	β
$h''(\chi)$	—	—	—	0	+	+	+
$h'(\chi)$	+	+	0	—	—	0	+
$h(\chi)$	↗	↗	↘	↘	↗	↗	↗

$$h(\alpha) = f(\alpha) - \lambda\alpha + \lambda\chi_0 - f(\chi_0) \stackrel{(\alpha)}{=} (f(\chi_1) - \lambda)(\alpha - \chi_0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h(\alpha) < 0$$

$$h(\rho_2) < h(\chi_0) = 0 \Rightarrow h(\rho_2) < 0$$

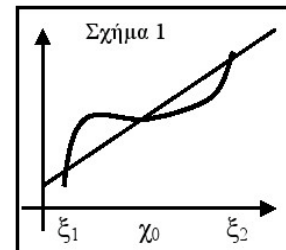
$$h(\beta) = f(\beta) - \lambda\beta + \lambda\chi_0 - f(\chi_0) \stackrel{(\beta)}{=} (f(\chi_2) - \lambda)(\beta - \chi_0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} h(\beta) > 0$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \rho_1]$ και $[\rho_2, \beta]$ έχω
ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \rho_1)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \beta)$ ώστε $h(\xi_1) = 0 = h(\xi_2)$

Άρα η εξίσωση $h(\chi) = 0 \Leftrightarrow f(\chi) = \lambda\chi - \lambda\chi_0 + f(\chi_0)$ έχει τρεις ρίζες τις $\xi_1 < \chi_0 < \xi_2$

(B) Έστω ότι παρουσιάζει καμπή στο $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$ με $\alpha, \beta \in \Delta$
τότε σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει ευθεία

(ε): $y = \lambda_\varepsilon \chi + \beta$ που περνάει από το σημείο καμπής και
τέμνει τη C_f σε δύο ακόμα σημεία τα $(\xi_1, f(\xi_1))$ και
 $(\xi_2, f(\xi_2))$ (σχήμα 1)



Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[\xi_1, \chi_0]$ και $[\chi_0, \xi_2]$ έχω ότι
υπάρχουν $\tau_1 \in (\xi_1, \chi_0)$ και $\tau_2 \in (\chi_0, \xi_2)$ ώστε

$$\frac{f(\xi_1) - f(\chi_0)}{\xi_1 - \chi_0} = f'(\tau_1) = \lambda_\varepsilon \text{ και } \frac{f(\xi_2) - f(\chi_0)}{\xi_2 - \chi_0} = f'(\tau_2) \text{ απ' όπου έχω:}$$

$$\left. \begin{aligned} f(\xi_1) - f(\chi_0) &= \lambda_\varepsilon (\xi_1 - \chi_0) \\ f(\xi_1) - f(\chi_0) &= \lambda_\varepsilon (\xi_1 - \chi_0) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow f(\xi_1) - f(\xi_2) = \lambda_\varepsilon (\xi_1 - \xi_2) \left\{ \begin{aligned} f(\xi_1) - f(\xi_2) &= f'(\tau_1)(\xi_1 - \xi_2) \\ f(\xi_1) - f(\xi_2) &= f'(\tau_2)(\xi_1 - \xi_2) \end{aligned} \right.$$

με $\tau_1 < \chi_0 < \tau_2$

Δηλαδή η ισότητα $f(\xi_1) - f(\xi_2) = f'(\mu)(\xi_1 - \xi_2)$ επαληθεύεται από δύο διαφορετικές
τιμές του μ (τις $\tau_1 < \tau_2$) Άτοπο

Άρα η C_f δεν παρουσιάζει καμπή

π.χ 26) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο (α, β) .

Δείξτε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής της παράστασης, σε οποιοδήποτε σημείο της βρίσκεται κάτω από τη γραφικής της παράσταση.

Λύση

Έστω $A(\gamma, f(\gamma))$ με $\gamma \in (\alpha, \beta)$ σημείο της C_f . Η εφαπτόμενη του γραφήματος της συνάρτησης σ' αυτό το σημείο δίνεται από την εξίσωση (ε): $y = f'(\gamma)(x - \gamma) + f(\gamma)$

Θα δείξω ότι ισχύει: $f(\kappa) \geq f'(\gamma)(\kappa - \gamma) + f(\gamma) \Leftrightarrow f(\kappa) - f(\gamma) \geq f'(\gamma)(\kappa - \gamma) \quad \forall \kappa \in (\alpha, \beta)$ (I)

Προφανώς για $\kappa = \gamma$ η (I) ισχύει με το ίσον.

Για $\kappa < \gamma$ έχω: f συνεχής στο $[\kappa, \gamma]$

f παρ/μη στο (κ, γ) με f' ↗ (αφού f κυρτή)

Οπότε από ΘΜΤ έχω ότι $\exists \chi_0 \in (\kappa, \gamma): \frac{f(\kappa) - f(\gamma)}{\kappa - \gamma} = f'(\chi_0) \Leftrightarrow f(\kappa) - f(\gamma) = f'(\chi_0)(\kappa - \gamma)$

Άρα (I) $\Leftrightarrow f'(\chi_0)(\kappa - \gamma) \geq f'(\gamma)(\kappa - \gamma) \Leftrightarrow f'(\chi_0) \leq f'(\gamma) \Leftrightarrow \chi_0 \leq \gamma$ ισχύει (αφού $\chi_0 \in (\kappa, \gamma)$)

Όμοια η (I) ισχύει και για $\kappa > \gamma$, άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο

Ανίσωση και διαφορά $f(\kappa) - f(\gamma)$,
μάλλον χρήση του ΘΜΤ

π.χ 27) Δίνεται το πολυώνυμο $\Pi(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$

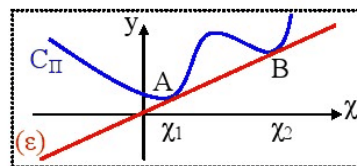
Δείξτε ότι δεν υπάρχει ευθεία που εφάπτεται στη C_Π σε δύο διαφορετικά σημεία

Λύση

Το πολ/μο $\Pi(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ είναι συνεχής και παρ/μη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση, με $\Pi'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ και $\Pi''(x) = 6\alpha x + 2\beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω ότι υπάρχει ευθεία (ε) που εφάπτεται στη C_Π , σε δύο διαφορετικά σημεία, τα $A(x_1, \Pi(x_1))$

και $B(x_2, \Pi(x_2))$ με $x_1 < x_2$ (διπλάνο σχήμα)



Έχω ότι η κλίση της (ε) στα σημεία επαφής: A και B, είναι ίση με την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος AB,

άρα θα ισχύει: $\Pi'(x_1) = \Pi'(x_2) = \frac{\Pi(x_2) - \Pi(x_1)}{x_2 - x_1}$ (I)

Θυμάμαι από Μέθοδο 3) β: περίπτωση
ότι η κλίση της (ε) στα σημεία επαφής:
A και B, είναι ίση με την κλίση
του τμήματος AB

Επειδή το $\Pi(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ είναι συνεχής

συνάρτηση στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , από το Θ.Μ.Τ. έχω ότι:

υπάρχει $\chi_0 \in (x_1, x_2): \frac{\Pi(x_2) - \Pi(x_1)}{x_2 - x_1} = \Pi'(\chi_0)$ οπότε από (I) έχω: $\Pi'(x_1) = \Pi'(\chi_0) = \Pi'(x_2)$ (2)

Από ΘΜΤ $= \Pi'(\chi_0)$ με $\chi_0 \in (x_1, x_2)$

Η $\Pi'(x)$ είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, \chi_0]$, $[\chi_0, x_2]$

παρ/μη σε καθένα από τα διαστήματα (x_1, χ_0) , (χ_0, x_2)

και ισχύει $\Pi'(x_1) = \Pi'(\chi_0) = \Pi'(x_2)$ (από (2))

Δύο ισότητες...
Θεώρημα Rolle

Άρα εφαρμόζεται για την Π' το θεώρημα Rolle σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα, επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, \chi_0)$ και $\xi_2 \in (\chi_0, x_2)$ ώστε $\Pi''(\xi_1) = \Pi''(\xi_2) = 0$. Δηλ. η εξίσωση

$\Pi''(x) = 0 \Leftrightarrow 6\alpha x + 2\beta = 0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες, τις $\xi_1 < \chi_0 < \xi_2$ αδύνατο (είναι 1^{ος} βαθμού)

Το περιεχόμενο αυτού του βιβλίου προέρχεται από Διδακτική Εμπειρία Είκοσι Δύο (-22-) τουλάχιστον ετών, στην παράδοση του κεφαλαίου των Παραγώγων σε μαθητές Γ' Λυκείου.

Είναι επανέκδοση μέρους του βιβλίου , την συγγραφή του οποίου άρχισα το 2004, την ολοκλήρωσα το 2005 και ζήτησα την έκδοσή του από τέσσερις διαφορετικούς εκδοτικούς οίκους, αμέσως μετά την συμβολαιογραφική του κατοχύρωση, οι επισημονικοί σύμβουλοι των οποίων το απέρριψαν (για τους δικούς τους λόγους)

Απαγορεύεται η μερική ή ολική αντιγραφή – αναπαραγωγή και δημοσίευσή του χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέως.

Για την κατοχύρωση του παρόντος, έχει κατατεθεί ένα βιβλίο σε συμβολαιογράφο. (22-3-2006)

Κάθε γνήσιο αντίγραφο φέρει την υπογραφή του συγγραφέως

ΑΘΗΝΑ 2014

ΤΖΟΥΝΑΚΟΣ Ν. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

Προτεινόμενη βιβλιογραφία

ΘΑΝΑΣΗ Π. ΞΕΝΟΥ:	ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ	Εκδόσεις ΖΗΤΗ	1993
ΣΤΕΛΙΟΣ Γ. ΕΥΡΙΠΙΩΤΗΣ:	ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	Εκδόσεις ΠΑΤΑΚΗ	1993