

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΖΟΥΝΑΚΟΣ Η. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΑΙ:

- ▶ Συνοπτική Θεωρία
- ▶ Μέθοδοι επίλυσης ασκήσεων
- ▶ Αναλυτικοί τρόποι σκέψης
- ▶ Λυμένα παραδείγματα
- ▶ Άλυτες ασκήσεις

2) Εξισώσεις με απόλυτη τιμή παράστασης του αγνώστου (βασική σκέψη, να "διώξω" το απόλυτο)

Περίπτωση: 1^η Μέσα σε **όλα τα απόλυτα**, έχω την **ίδια παράσταση του αγνώστου** ($|A(x)|$)

→ Επιλύω την εξίσωση ως προς άγνωστο το απόλυτο → Καταλήγω: $|A(x)| = B$ (1)

ή $|A(x)| = B(x)$ (2)

Για την (1) έχω: αν $B < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

αν $B = 0$ τότε η (1) $\Leftrightarrow A(x) = 0 \Leftrightarrow \dots$ (..λύνω..)

αν $B > 0$ τότε η (1) $\Leftrightarrow A(x) = B$ (i) ή $A(x) = -B$ (ii)

και λύνω τις (i) και (ii)

Για την (2) βάζω τον περιορισμό: $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dots$ (..λύνω την ανίσωση ως προς x ..)

συνεχίζω: (2) $\Leftrightarrow A(x) = B(x)$ (i) ή $A(x) = -B(x)$ (ii)



Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-3|-14 = x^2 - |9-6x| - |x^2+2|$

A) Πολυωνυμικές εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Βήματα: 1°. Βγάζω τις παρενθέσεις

2°. Χωρίζω γνωστούς από άγνωστους όρους και κάνω τις πράξεις → καταλήγω $\alpha\chi = \beta$ (I)

Αν $\alpha \neq 0$ τότε (I) $\Leftrightarrow \chi = \frac{\beta}{\alpha}$ (η εξίσωση έχει μοναδική λύση)

Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη ($0\chi = \beta \neq 0$)

Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ τότε η εξίσωση αληθεύει για όλες τις επιτρεπτές τιμές του χ

($0\chi = 0$ ταυτότητα - αόριστη)

Παρατηρήσεις 1. Όταν υπάρχουν κλασματικοί συντελεστές τότε, αφού βγάλω τις παρενθέσεις, (1° βήμα), κάνω απαλοιφή παρονομαστών (πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π. (παρ/στών)), βγάζω τις νέες παρενθέσεις που δημιουργήθηκαν, (αφού οι αριθμητές των κλασμάτων μπαίνουν σε νέες παρενθέσεις) και μετά προχωρώ στο 2° βήμα

2. Αν ο συντελεστής του αγνώστου εξαρτάται από παράμετρο, διακρίνω τις περιπτώσεις

(i) Αν συντελεστής $\neq 0 \Leftrightarrow \dots$ παράμετρος $\neq \dots$, και λέω: η εξίσωση έχει μοναδική λύση

$$\text{την } \chi = \frac{\beta}{\text{συντελεστής}}$$

(ii) Αν συντελεστής $= 0 \Leftrightarrow \dots$ παράμετρος $= \dots$ (λύνω ως προς την παράμετρο) και μετά,

για κάθε τιμή της παραμέτρου που βρήκα, πάω στην (I), αντικαθιστώ την παράμετρο και βλέπω αν η εξίσωση είναι αδύνατη ή έχει άπειρες λύσεις

π.χ. 1) Λύσετε τις εξισώσεις: (i) $2(\chi-3)-3(2-3\chi)=1-\chi-(2-3\chi)$ (ii) $\chi-1-\frac{5}{2}\left(\chi-\frac{2-\chi}{3}\right)=2-(\chi-1)-\frac{2\chi+1}{4}$

Λύση

$$(i) 2(\chi-3)-3(2-3\chi)=1-\chi-(2-3\chi) \Leftrightarrow 2\chi-6-6+9\chi=1-\chi-2+3\chi \Leftrightarrow 2\chi+9\chi+\chi-3\chi=6+6+1-2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9\chi=11 \Leftrightarrow \chi=\frac{11}{9}$$

$$(ii) \chi-1-\frac{5}{2}\left(\chi-\frac{2-\chi}{3}\right)=2-(\chi-1)-\frac{2\chi+1}{4} \Leftrightarrow \chi-1-\frac{5\chi}{2}+\frac{10-5\chi}{6}=2-\chi+1-\frac{2\chi+1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\cdot\chi-12\cdot 1-\frac{6}{2}\cdot\frac{5\chi}{2}+\frac{2}{6}\cdot\frac{10-5\chi}{1}=\frac{12\cdot 2-12\cdot\chi+12\cdot 1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2\chi+1}{1}}{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\chi-12-30\chi+2\cdot(10-5\chi)=24-12\chi+12-3(2\chi+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\chi-30\chi-10\chi+12\chi+6\chi=12-20+24+12-3 \Leftrightarrow -10\chi=25 \Leftrightarrow \chi=-\frac{25}{10} \Leftrightarrow \chi=-\frac{5}{2}$$

π.χ. 2) Για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε τις εξισώσεις: (i) $2\chi-(3\chi-\kappa)=2-(\kappa-1)(\chi+3)$

(ii) $(\kappa-1)(\kappa+3)\chi=2\kappa^3-3\kappa+1$ (iii) $(\kappa+2\lambda-1)\chi=\kappa+\lambda-3$

Λύση

$$(i) 2\chi-(3\chi-\kappa)=2-(\kappa-1)(\chi+3) \Leftrightarrow 2\chi-3\chi+\kappa=2-(\kappa\chi+3\kappa-\chi-3) \Leftrightarrow 2\chi-3\chi+\kappa=2-\kappa\chi-3\kappa+\chi+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\chi - 3\chi + \chi - \chi = -\kappa + 2 - 3\kappa + 3 \Leftrightarrow \chi - 2\chi = 5 - 4\kappa \Leftrightarrow (\kappa - 2)\chi = 5 - 4\kappa \quad (I)$$

■ Αν $(\kappa - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq 2$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $\chi = \frac{5-4\kappa}{\kappa-2}$

■ Αν $(\kappa - 2) = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$ τότε η $(I) \Leftrightarrow 0\chi = 5 - 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 0\chi = -3$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

(ii) $(\kappa - 1)(\kappa + 3)\chi = 2\kappa^3 - 3\kappa + 1 \quad (2)$

■ Αν $(\kappa - 1)(\kappa + 3) \neq 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1 \neq 0 \text{ και } \kappa + 3 \neq 0) \Leftrightarrow (\kappa \neq 1 \text{ και } \kappa \neq -3)$ τότε η εξίσωση έχει

μοναδική λύση την $\chi = \frac{2\kappa^3 - 3\kappa + 1}{(\kappa - 1)(\kappa + 3)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{2\kappa^3 - 2\kappa - \kappa + 1}{(\kappa - 1)(\kappa + 3)} \Leftrightarrow \chi = \frac{2\kappa(\kappa^2 - 1) - (\kappa - 1)}{(\kappa - 1)(\kappa + 3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{(\kappa - 1)[2\kappa(\kappa + 1) - 1]}{(\kappa - 1)(\kappa + 3)} \Leftrightarrow \chi = \frac{2\kappa^2 + 2\kappa - 1}{\kappa + 3}$$

■ Αν $(\kappa - 1)(\kappa + 3) = 0 \Leftrightarrow (\kappa - 1 = 0 \text{ ή } \kappa + 3 = 0) \Leftrightarrow (\kappa = 1 \text{ ή } \kappa = -3)$ τότε

για $\kappa = 1$ η $(2) \Leftrightarrow 0\chi = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 \Leftrightarrow 0\chi = 0$, άρα η εξίσωση είναι ταυτότητα (αληθεύει $\forall \chi \in \mathbb{R}$)

για $\kappa = -3$ η $(2) \Leftrightarrow 0\chi = 2 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 1 \Leftrightarrow 0\chi = -44$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

(iii) $(\kappa + 2\lambda - 1)\chi = \kappa + \lambda - 3 \quad (3)$

■ Αν $(\kappa + 2\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq 1 - 2\lambda$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $\chi = \frac{\kappa + \lambda - 3}{\kappa + 2\lambda - 1}$

■ Αν $(\kappa + 2\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1 - 2\lambda$ τότε η $(3) \Leftrightarrow 0\chi = 1 - 2\lambda + \lambda - 3 \Leftrightarrow 0\chi = -2 - \lambda$, για την οποία θα έχω:

● Αν $-2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$ η εξίσωση θα είναι αδύνατη

●● Αν $-2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ η εξίσωση γράφεται $0\chi = 0$ άρα είναι αόριστη (αληθεύει $\forall \chi \in \mathbb{R}$)

B) Πολυωνυμικές εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Βήματα: 1°. Βγάσω τις παρενθέσεις

2°. Φέρνω όλους τους όρους στο 1° μέλος, κάνω τις πράξεις $\rightarrow$ καταλήγω $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

3°. Υπολογίζω τη Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και έχω

Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες (διαφορετικές) τις: $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα (διπλή) την $\chi = \frac{-\beta}{2\alpha}$

Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

Παρατήρηση. Όταν υπάρχουν κλασματικοί συντελεστές τότε, αφού βγάλω τις παρενθέσεις, (1° βήμα), κάνω απαλοιφή παρονομαστών (πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π. (παρ/στών)), βγάσω τις νέες παρενθέσεις που δημιουργήθηκαν, (αφού οι αριθμητές των κλασμάτων μπαίνουν σε νέες παρενθέσεις) και μετά προχωρώ στο 2° βήμα

π.χ. 1) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) \quad 3x(x-2)-(x+1)(1-x)=x+1$$

$$(ii) \quad \frac{x-1}{2} - \frac{x(x+1)-1}{3} = x - \frac{5x+3}{6}$$

$$(iii) \quad 2x^2 - \sqrt{7}x + 1 = 0$$

$$(iv) \quad 4x^2 - 8x + 4\sqrt{3} - 3 = 0$$

Λύση

$$(i) \quad 3x(x-2)-(x+1)(1-x)=x+1 \Leftrightarrow 3x^2-6x-(1-x^2)=x+1 \Leftrightarrow 3x^2-6x-1+x^2-x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-7x-2=0$$

εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, όπου

$$\alpha=4, \beta=-7, \gamma=-2 \text{ άρα } \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 49 + 32 = 81 > 0 \text{ Επομένως η εξίσωση έχει}$$

δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{7 \pm 9}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{16}{8} = 2 \\ x_2 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \frac{x-1}{2} - \frac{x(x+1)-1}{3} = x - \frac{5x+3}{6} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} - \frac{x^2+x-1}{3} = x - \frac{5x+3}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{x^2+x-1}{3} = 6x - 6 \cdot \frac{5x+3}{3} \Leftrightarrow 3(x-1) - 2(x^2+x-1) = 6x - (5x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-3-2x^2+2x-2=6x-5x-3 \Leftrightarrow 3x-3-2x^2+2x-2-6x+5x+3=0 \Leftrightarrow -2x^2+4x-2=0 \text{ (I)}$$

εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, όπου $\alpha=-2, \beta=4, \gamma=-2$

$$\text{άρα } \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 - 16 = 0$$

Επομένως η εξίσωση έχει μία ρίζα (διπλή) την $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-4}{2(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$

Παρατήρηση: Θυμηθείτε από μεθόδους παραγοντοποίησης πως όταν $\Delta = 0$ το τριώνυμο κρύβει ανάπτυγμα τετραγώνου, επομένως την (I) θα μπορούσα να την λύσω και ως εξής:

$$-2x^2+4x-2=0 \Leftrightarrow -2(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow -2(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$(iii) \quad 2x^2 - \sqrt{7}x + 1 = 0 \text{ εξίσωση } 2^{\text{ου}} \text{ βαθμού με Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma, \text{ όπου}$$

$$\alpha=2, \beta=-\sqrt{7}, \gamma=1 \text{ άρα } \Delta = (-\sqrt{7})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 7 - 8 = -1 < 0$$

επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη

$$(iv) \quad 4x^2 - 8x + 4\sqrt{3} - 3 = 0 \text{ εξίσωση } 2^{\text{ου}} \text{ βαθμού με Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma, \text{ όπου}$$

$$\alpha=4, \beta=-8, \gamma=4\sqrt{3}-3$$

$$\text{άρα } \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (4\sqrt{3}-3) =$$

$$= 64 - 16 \cdot (4\sqrt{3}-3) = 16 \cdot [4 - (4\sqrt{3}-3)] =$$

$$= 16(4 - 4\sqrt{3} + 3) = 16(7 - 4\sqrt{3}) =$$

$$16(2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2) = 16(2 - \sqrt{3})^2 > 0$$

Λόγω του $\sqrt{\Delta}$ περιμένω να παρουσιαστεί $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$
Θυμάμαι (από άσκηση στις τετραγωνικές ρίζες) ότι ίσως να έχω στο υπόριζο ανάπτυγμα τετραγώνου, αρκεί να υπάρχουν αριθμοί α, β ώστε να είναι:

$$2 \cdot \alpha \cdot \beta \rightarrow 4\sqrt{3} = \begin{cases} 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \\ 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 7,$$

κάτι το οποίο γίνεται όταν $\alpha=2$ και $\beta=\sqrt{3}$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{16(2-\sqrt{3})^2}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 4(2-\sqrt{3})}{8} \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = \frac{8+8-4\sqrt{3}}{8} = \frac{16-4\sqrt{3}}{8} = \frac{4(4-\sqrt{3})}{8} = \frac{4-\sqrt{3}}{2} \\ \chi_2 = \frac{8-8+4\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Γ) Πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού $\geq 3^{\text{ου}}$

Βήματα: 1°. Φέρνω όλους τους όρους στο πρώτο μέλος

2°. Παραγοντοποιώ το πρώτο μέλος έως ότου οι παρενθέσεις που παρουσιάζονται να περιέχουν πολυώνυμο το πολύ 2^{ου} βαθμού

3°. Εξισώνω κάθε παράγοντα με το μηδέν

π.χ. 1) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(i) \quad 2(\chi^2-1)(\chi^2-5\chi+6)=3\chi^2-12\chi+9$$

$$(ii) \quad (\chi^2+\chi+1)^2+\chi^2+1=2\chi-2(\chi^3-1) \quad (iii) \quad \chi^3-1+(2\chi-3)^3+(4-3\chi)^3=3\chi^2-3\chi$$

Λύση

$$(i) \quad 2(\chi^2-1)(\chi^2-5\chi+6)=3\chi^2-12\chi+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\chi-1)(\chi+1)(\chi-2)(\chi-3)-3\chi^2+12\chi-9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\chi-1)(\chi+1)(\chi-2)(\chi-3)-3(\chi^2-4\chi+3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\chi-1)(\chi+1)(\chi-2)(\chi-3)-3(\chi-1)(\chi-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\chi-1)(\chi-3)[2(\chi+1)(\chi-2)-3]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\chi-1)(\chi-3)[2(\chi^2-2\chi+\chi-2)-3]=0 \Leftrightarrow (\chi-1)(\chi-3)[2(\chi^2-\chi-2)-3]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\chi-1)(\chi-3)[2\chi^2-2\chi-4-3]=0 \Leftrightarrow (\chi-1)(\chi-3)(2\chi^2-2\chi-7)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi-1=0 \Leftrightarrow \chi=1 \\ \chi-3=0 \Leftrightarrow \chi=3 \\ 2\chi^2-2\chi-7=0 \quad (1) \end{cases}$$

Η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 4 + 56 = 60 > 0$,

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{60}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 15}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = \frac{2(1+\sqrt{15})}{4} = \frac{1+\sqrt{15}}{2} \\ \chi_2 = \frac{2(1-\sqrt{15})}{4} = \frac{1-\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

$$(ii) \quad (\chi^2+\chi+1)^2+\chi^2+1=2\chi-2(\chi^3-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\chi^2+\chi+1)^2+\chi^2+2\chi+1+2(\chi^3-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\chi^2-\chi+1)^2+(\chi+1)^2-2(\chi+1)(\chi^2-\chi+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\chi^2-\chi+1)-(\chi+1)]^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\chi^2-\chi+1-\chi-1]^2=0 \Leftrightarrow (\chi^2-2\chi)^2=0 \Leftrightarrow \chi^2-2\chi=0 \Leftrightarrow \chi(\chi-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi=0 \\ \text{ή} \\ \chi=2 \end{cases}$$

Φαίνεται να έχω εξίσωση 4^{ου} βαθμού (αφού έχω γινόμενο παρενθέσεων με δευτεροβάθμια πολυώνυμα) $\rightarrow$ όλα στο 1^ο μέλος και παραγοντοποίηση

Θυμηθείτε από μεθόδους παραγοντοποίησης ότι: «Αν υπάρχουν έτοιμες παρενθέσεις δεν βιάζομαι να τις απαλείψω. (Ισως να έχω έτοιμη μια πρώτη ομαδοποίηση). Συνεχίζω την παραγοντοποίηση των ομάδων που υπάρχουν ψάχνοντας για κοινούς παράγοντες (ίδιες παρενθέσεις) οπότε έχουμε "πετυχημένη" ομαδοποίηση»

Εξίσωση 4^{ου} βαθμού αφου: $(\chi^2 \dots)^2 \rightarrow \chi^4 \dots$
... τα φέρνω όλα στο πρώτο μέλος ...

Γράφω τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του χ

Θυμίζει την ταυτότητα $\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta\alpha \rightarrow (\alpha - \beta)^2$

$$(iii) \quad x^3 - 1 + (2x - 3)^3 + (4 - 3x)^3 = 3x^2 - 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + (2x - 3)^3 + (4 - 3x)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 + (2x-3)^3 + (4-3x)^3 = 0 \xrightarrow[\text{ταυτότητα Euler υπό συνθήκη}]{(x-1)+(2x-3)+(4-3x)=0}$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)(2x-3)(4-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta \ (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \eta \ (2x-3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \\ \eta \ (4-3x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Θυμηθείτε από παραγο-
ντοποίηση την ταυτότη-
τα (Euler) υπό συνθήκη

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \xrightarrow[\eta \ \alpha = \beta = \gamma]{\alpha + \beta + \gamma = 0} 3\alpha\beta\gamma$$

Δ) Η Εξίσωση $x^v = \alpha$ με $v \in \mathbb{N}^*$

Αν v περιττός και $\alpha > 0$ η εξίσωση έχει λύση την $x = \sqrt[v]{\alpha}$

Αν v περιττός και $\alpha < 0$ η εξίσωση έχει λύση την $x = -\sqrt[v]{|\alpha|}$

Αν v άρτιος και $\alpha > 0$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $x = \sqrt[v]{\alpha}$ και $x = -\sqrt[v]{\alpha}$

Αν v άρτιος και $\alpha < 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη

π.χ. 1) Να λύσετε τις εξισώσεις: (i) $x^3 - 8 = 0$ (ii) $x^3 + 1 = 0$ (iii) $x^4 - 16 = 0$ (iv) $x^6 + 2 = 0$
(v) $x^4 - 25 = 0$ (vi) $x^4 - 2x = 0$ (vii) $(x^2 - 7)^3 = 8$ (viii) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 16$

Λύση

$$(i) \quad x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$$

$$(ii) \quad x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = -1$$

$$(iv) \quad x^6 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -2 < 0 \text{ αδύνατη}$$

$$(v) \quad x^4 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 25 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{25} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{5^2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{5}$$

$$(vi) \quad x^4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$$(vii) \quad (x^2 - 7)^3 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 7 = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x^2 - 7 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 7 + 2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{9} \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$(viii) \quad x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 16 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 16 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{16} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3]{2 \cdot 8} \Leftrightarrow x = 1 + 2\sqrt[3]{2}$$

Ε) Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

1) Ρητές εξισώσεις (Κλασματικές εξισώσεις που έχουν πολώνυμο του αγνώστου σε παρονομαστή)

Βήματα: 1°. Βγάσω τις παρενθέσεις (εξαιρούνται οι παρενθέσεις παραγοντοποιημένων παρονομαστών)

2°. Παραγοντοποιώ τους παρονομαστές – βρίσκω το Ε.Κ.Π.(παρονομαστών) – βάζω περιορισμούς

3°. Κάνω απαλοιφή παρονομαστών (πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το Ε.Κ.Π.(παρ/στών)), βγάσω τις νέες παρενθέσεις που δημιουργήθηκαν, (αφού οι αριθμητές των κλασμάτων μπαίνουν σε νέες παρενθέσεις) και καταλήγω σε πολυωνυμική εξίσωση

4°. Μετά τη λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης, ελέγχω αν οι ρίζες που βρήκα είναι δεκτές ή αν απορρίπτονται

π.χ. 1) Να λύσετε τις εξισώσεις: (i) $2(1+\chi) - \frac{\chi^2 + \chi - 5}{\chi - 3} = \frac{3\chi + 1}{3}$

(ii) $\frac{3\chi - 2}{\chi - 1} - 2 = \frac{\chi + 6}{\chi + 2} - \frac{3(\chi - 2)}{\chi^2 + \chi - 6}$

(iii) $\frac{\chi^3 + 2\chi^2 - \chi - 2}{(\chi + 1)(2\chi - 1)} = \chi + \frac{1 + 2(1 - \chi)}{2(1 - \chi) - 1}$

(iv) $\frac{2}{1 - \frac{2}{\chi - 1}} - \frac{3\chi - 1}{\chi^2 - 5\chi + 6} = \frac{\chi}{\chi - 2}$

Λύση

(i) $2(1+\chi) - \frac{\chi^2 + \chi - 5}{\chi - 3} = \frac{3\chi + 1}{3} \Leftrightarrow$ Ε.Κ.Π. = $3(\chi - 3)$ Περιορισμοί: πρέπει $\chi - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 3$

$\Leftrightarrow 2 + 2\chi - \frac{\chi^2 + \chi - 5}{\chi - 3} = \frac{3\chi + 1}{3} \Leftrightarrow \frac{3(\chi - 3)2 + 3(\chi - 3)2\chi - 3(\chi - 3)\frac{\chi^2 + \chi - 5}{\chi - 3} = 3(\chi - 3)\frac{3\chi + 1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6(\chi - 3) + 6\chi(\chi - 3) - 3(\chi^2 + \chi - 5) = (\chi - 3)(3\chi + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\chi - 18 + 6\chi^2 - 18\chi - 3\chi^2 - 3\chi + 15 = 3\chi^2 + \chi - 9\chi - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\chi - 18 + 6\chi^2 - 18\chi - 3\chi^2 - 3\chi + 15 - 3\chi^2 - \chi + 9\chi + 3 = 0 \Leftrightarrow -7\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$ δεκτή

(ii) $\frac{3\chi - 2}{\chi - 1} - 2 = \frac{\chi + 6}{\chi + 2} - \frac{3(\chi - 2)}{\chi^2 + \chi - 6} \Leftrightarrow$

Ε.Κ.Π. = $(\chi - 1)(\chi + 2)$

Πρέπει $(\chi - 1)(\chi + 2) \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 1$ και $\chi \neq -2$

$\Leftrightarrow \frac{3\chi - 2}{\chi - 1} - 2 = \frac{\chi + 6}{\chi + 2} - \frac{3(\chi - 2)}{(\chi - 1)(\chi + 2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3\chi - 2}{\chi - 1} - 2 = \frac{\chi + 6}{\chi + 2} - \frac{3\chi - 6}{(\chi - 1)(\chi + 2)} \Leftrightarrow$

Δεν έδωξα αμέσως την παρένθεση σκετόμενος ότι μετά την παραγοντοποίηση του παρονομαστή ίσως να προκύψει απλοποίηση

$\Leftrightarrow (\chi - 1)(\chi + 2)\frac{3\chi - 2}{\chi - 1} - (\chi - 1)(\chi + 2)2 = (\chi - 1)(\chi + 2)\frac{\chi + 6}{\chi + 2} - (\chi - 1)(\chi + 2)\frac{3\chi - 6}{(\chi - 1)(\chi + 2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\chi + 2)(3\chi - 2) - 2(\chi^2 + 2\chi - \chi - 2) = (\chi - 1)(\chi + 6) - (3\chi - 6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\chi^2 - 2\chi + 6\chi - 4 - 2\chi^2 - 4\chi + 2\chi + 4 = \chi^2 + 6\chi - \chi - 6 - 3\chi + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\chi^2 - 2\chi + 6\chi - 4 - 2\chi^2 - 4\chi + 2\chi + 4 - \chi^2 - 6\chi + \chi + 6 + 3\chi - 6 = 0 \Leftrightarrow 0\chi = 0$

Άρα η εξίσωση **αληθεύει για όλες τις τιμές του** $\chi \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

(iii) $\frac{\chi^3 + 2\chi^2 - \chi - 2}{(\chi + 1)(2\chi - 1)} = \chi + \frac{1 + 2(1 - \chi)}{2(1 - \chi) - 1} \Leftrightarrow \frac{\chi^3 + 2\chi^2 - \chi - 2}{(\chi + 1)(2\chi - 1)} = \chi + \frac{1 + 2 - 2\chi}{2 - 2\chi - 1} \Leftrightarrow$

Πρέπει: $\chi \neq -1$ και $2\chi - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\chi^3(\chi + 2) - (\chi + 2)}{(\chi + 1)(2\chi - 1)} = \chi + \frac{3 - 2\chi}{1 - 2\chi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(\chi + 2)(\chi^2 - 1)}{(\chi + 1)(2\chi - 1)} = \chi - \frac{3 - 2\chi}{2\chi - 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(\chi + 2)(\chi - 1)(\chi + 1)}{(\chi + 1)(2\chi - 1)} = \chi - \frac{3 - 2\chi}{2\chi - 1} \Leftrightarrow \frac{(\chi + 2)(\chi - 1)}{(2\chi - 1)} = \chi - \frac{3 - 2\chi}{2\chi - 1} \Leftrightarrow$ Ε.Κ.Π. = $2\chi - 1$

1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ένα κλάσμα απλοποιείται αν κάποιος από τους αριθμούς που μηδενίζουν τον παρονομαστή του, μηδενίζει και τον αριθμητή του (εδώ η τιμή $\chi = -1$ μηδενίζει και τον παρονομαστή και τον αριθμητή) γι' αυτό παραγοντοποίησα και τον αριθμητή

2. Προσοχή! Κάθε φορά που διώχνεις παράγοντα ενός παρονομαστή να βάζεις και τον αντίστοιχο περιορισμό του!

$$\Leftrightarrow (2\chi-1) \frac{(\chi+2)(\chi-1)}{(2\chi-1)} = (2\chi-1)\chi - (2\chi-1) \frac{3-2\chi}{2\chi-1} \Leftrightarrow \chi^2 - \chi + 2\chi - 2 = 2\chi^2 - \chi - (3-2\chi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 - \chi + 2\chi - 2 = 2\chi^2 - \chi - 3 + 2\chi \Leftrightarrow \chi^2 - \chi + 2\chi - 2 - 2\chi^2 + \chi + 3 - 2\chi = 0 \Leftrightarrow -\chi^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = -1 & \text{απορρίπτεται} \\ \text{ή} & \chi = 1 & \text{δεκτή} \end{cases}$$

(iv)

Περιορισμοί: πρέπει $\chi \neq 1$ και $\chi \neq 2, \chi \neq 3$

$$\frac{2}{1 - \frac{2}{\chi-1}} - \frac{3\chi-1}{\chi^2-5\chi+6} = \frac{\chi}{\chi-2} \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{\chi-1}{1} - \frac{2}{\chi-1}} - \frac{3\chi-1}{\chi^2-5\chi+6} = \frac{\chi}{\chi-2} \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{\chi-1}{1} - \frac{2}{\chi-1}} - \frac{3\chi-1}{\chi^2-5\chi+6} = \frac{\chi}{\chi-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\chi-1)}{\chi-3} - \frac{3\chi-1}{\chi^2-5\chi+6} = \frac{\chi}{\chi-2} \Leftrightarrow \frac{2(\chi-1)}{\chi-3} - \frac{3\chi-1}{(\chi-2)(\chi-3)} = \frac{\chi}{\chi-2} \Leftrightarrow$$

Ε.Κ.Π. = $(\chi-2)(\chi-3)$

Κανόνας "άκρους - μέσους",
το $\chi-1$ φεύγει από τον
παρονομαστή. → Βάζω τον
αντίστοιχο περιορισμό του!

$$\Leftrightarrow (\chi-2)(\chi-3) \frac{2\chi-2}{\chi-3} - (\chi-2)(\chi-3) \frac{3\chi-1}{(\chi-2)(\chi-3)} = (\chi-2)(\chi-3) \frac{\chi}{\chi-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\chi-2)(2\chi-2) - (3\chi-1) = (\chi-3)\chi \Leftrightarrow 2\chi^2 - 2\chi - 4\chi + 4 - 3\chi + 1 = \chi^2 - 3\chi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\chi^2 - 2\chi - 4\chi + 4 - 3\chi + 1 - \chi^2 + 3\chi = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 6\chi + 5 = 0 \quad \text{εξίσωση 2ου βαθμού με}$$

Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 > 0$, Επομένως η εξίσωση
έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = \frac{6+4}{2} = 5 & \text{δεκτή} \\ \chi_2 = \frac{6-4}{2} = 1 & \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

2) Εξισώσεις με απόλυτη τιμή παράστασης του αγνώστου (βασική σκέψη, να "διώξω" το απόλυτο)

Περίπτωση: 1^η Μέσα σε **όλα τα απόλυτα**, έχω την **ίδια παράσταση του αγνώστου** ($\cdot |A(\chi)|$)

→ Επιλύω την εξίσωση ως προς άγνωστο το απόλυτο → Καταλήγω: $|A(\chi)| = B$ **(1)**

ή $|A(\chi)| = B(\chi)$ **(2)**

Για την **(1)** έχω: αν $B < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

αν $B = 0$ τότε η **(1)** $\Leftrightarrow A(\chi) = 0 \Leftrightarrow \dots\dots$ (..λύνω..)

αν $B > 0$ τότε η **(1)** $\Leftrightarrow A(\chi) = B$ (i) ή $A(\chi) = -B$ (ii)

και λύνω τις (i) και (ii)

Για την **(2)** βάζω τον **περιορισμό**: $B(\chi) \geq 0 \Leftrightarrow \dots\dots$ (..λύνω την ανίσωση ως προς χ ..)

..συνεχίζω: **(2)** $\Leftrightarrow A(\chi) = B(\chi)$ (i) ή $A(\chi) = -B(\chi)$ (ii)

Λύνω τις (i), (ii) και δέχομαι μόνο τις λύσεις που ικανοποιούν τον **περιορισμό**

Παρατήρηση – Σχόλιο: Αν δεν σου είναι εύκολο να λύσεις την ανίσωση του περιορισμού ως προς χ , τότε
→ θα παίρνεις κάθε μία λύση που βρήκες → θα την αντικαθιστάς στον **περιορισμό**
→ αν τον επαληθεύει θα είναι δεκτή ενώ αν δεν τον επαληθεύει θα απορρίπτεται

π.χ. 1) Να λύσετε τις εξισώσεις (i) $|2x-3|-14=x^2-|9-6x|-|x^2+2|$ (ii) $|3-|7-2x||=4$

(iii) $|x^2-2x|=2x-3$ (iv) $|2-|x-3||-x=3||x-3|-2|+||x|-x|-|x|-6$ (v) $\frac{2-|3-x|+1}{3}+|x-3|=1$

Λύση

(i) $|2x-3|-14=|x^2+2|-|9-6x|-x^2 \Leftrightarrow$

$x^2+2>0 \Leftrightarrow |2x-3|-14=x^2-|3(2x-3)|-(x^2+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2x-3|-14=x^2-|3| \cdot |2x-3|-x^2-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2x-3|-14=x^2-3|2x-3|-x^2-2 \Leftrightarrow |2x-3|+3|2x-3|=x^2-x^2-2+14 \Leftrightarrow 4|2x-3|=12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2x-3|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=3 \\ \text{ή} \\ 2x-3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ \text{ή} \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \text{ή} \\ x=0 \end{cases}$

Έχω μόνο ένα **απόλυτο**

(ii) $|3-|7-2x||=4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-|7-2x|=4 \\ \text{ή} \\ 3-|7-2x|=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |7-2x|=-1<0 \\ \text{ή} \\ |7-2x|=7 \quad (\alpha) \end{cases}$ αδύνατο

Η $(\alpha) \Leftrightarrow |7-2x|=7 \Leftrightarrow \begin{cases} 7-2x=7 \\ \text{ή} \\ 7-2x=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ \text{ή} \\ 2x=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x=7 \end{cases}$

Αφού η απόλυτη τιμή δεν ισούται ποτέ με αρνητικό αριθμό

(iii) $|x^2-2x|=2x-3$ (1) πρέπει $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

οπότε (1) $\Leftrightarrow (x^2-2x=2x-3 \quad (\alpha) \quad \text{ή} \quad x^2-2x=-2x+3 \quad (\beta))$

$(\alpha): x^2-2x=2x-3 \Leftrightarrow x^2-2x-2x+3=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ x=3 \text{ δεκτή} \end{cases}$

$(\beta): x^2-2x=-2x+3 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \text{ δεκτή} \\ \text{ή} \\ x=-\sqrt{3} \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$

(iv) $|2-|x-3||-x=3||x-3|-2|+||x|-x|-|x|-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2-|x-3||-x=3|2-|x-3||+(||x|-x|-|x|-6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2-|x-3||-x=3|2-|x-3||+|x|-x-|x|-6 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2|2-|x-3||=6 \Leftrightarrow |2-|x-3||=3 \Leftrightarrow$

Φαίνεται ότι στην εξίσωση υπάρχουν τρεις απόλυτες τιμές με τον άγνωστο x . Όμως παρατηρώ ότι $1^{\text{ov}} x^2+2>0$ οπότε $|x^2+2|=x^2+2$ και 2^{ov} οι $2x-3$ και $9-6x$ "ταιριάζουν" αφού $9-6x=-3(2x-3)$

Αρχικά φαίνεται να υπάρχουν τέσσερες απόλυτες τιμές με διαφορετικές **παραστάσεις του x** . Όμως, με δεύτερη ματιά, παρατηρώ ότι $|2-|x-3||=||x-3|-2|$ αφού $|a|=-|a|$ και $||x|-x|=|x|-x$ αφού $|x| \geq x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-|x-3|=3 \\ 2-|x-3|=-3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3|=-1 < 0 \text{ αδύνατο} \\ |x-3|=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=5 \\ x-3=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$(v) \frac{2-|3-x|+1}{3} + |x-3|=1 \Leftrightarrow \frac{2-(|3-x|+1)}{3} + |x-3|=1 \Leftrightarrow \frac{2-|x-3|-1}{3} + |x-3|=1 \Leftrightarrow \frac{1-|x-3|}{3} + 3 \cdot |x-3|=3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1-|x-3|+3 \cdot |x-3|=3 \Leftrightarrow 2 \cdot |x-3|=2 \Leftrightarrow |x-3|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

ΕΚΠ = 3

Περίπτωση: 2^η Μέσα στα **απόλυτα**, έχω διαφορετικές **παραστάσεις του αγνώστου** ($|A(x)| \dots |B(x)|$)

→ Φτιάχνω πίνακα προσήμων των παραστάσεων που είναι μέσα στα απόλυτα και λύνω την εξίσωση για κάθε περίπτωση που παρουσιάστηκε στον πίνακα

Ειδικότερα: Αν παρουσιάζονται μόνο δύο διαφορετικά απόλυτα με θετικούς συντελεστές, ίσως να μπορώ να δουλέψω με μία από τις παρακάτω μορφές

$$(1) \quad \alpha|A(x)| = \beta|B(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(A(x)) = \beta(B(x)) \\ \text{ή} \\ \alpha(A(x)) = -\beta(B(x)) \end{cases}$$

α, β
θετικοί

$$(2) \quad \alpha|A(x)| + \beta|B(x)| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \quad (i) \\ \text{και} \\ B(x) = 0 \quad (ii) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Λύνω τις (i), (ii) και δέχομαι ως λύση της εξίσωσης μόνο τις κοινές λύσεις των (i) και (ii)} \end{array}$$

α, β
θετικοί

π.χ. 1) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $|x-3|-2 = x^2 - |1-2x|$

(ii) $|x^2-3x-4| = 2|4x+2|$

(iii) $|x^2-2x| + 3|x^3-x^2-2x| = 0$

Λύση

Έχω δύο διαφορετικά απόλυτα. Για να μπορέσω να τα "διώξω", θα φτιάξω πίνακα προσήμων των παραστάσεων που περιέχονται στα απόλυτα

(i) $|x-3|-2 = x^2 - |1-2x| \Leftrightarrow |x-3| + |1-2x| = x^2 + 2 \quad (1)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	0	+
$1-2x$	+	0	-	-

Από τον διπλανό πίνακα προσήμων φαίνεται ότι υπάρχουν τρεις περιπτώσεις (συνδιασμοί) για τα πρόσημα των $x-3$ και $1-2x$

■ Για $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ έχω $x-3 < 0$ και $1-2x \geq 0$ οπότε

(1) $\Leftrightarrow (3-x) + (1-2x) = x^2 + 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 0$ εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17 > 0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} & \text{απορρίπτεται} \\ \chi_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

■ Για $\chi \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ έχω $\chi - 3 \leq 0$ και $1 - 2\chi \leq 0$ οπότε

$$(1) \Leftrightarrow (3 - \chi) + (2\chi - 1) = \chi^2 + 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi^2 - \chi = 0 \Leftrightarrow \chi \cdot (\chi - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 0 & \text{απορρίπτεται} \\ \chi = 1 & \text{δεκτή} \end{cases}$$

■ Για $\chi \in [3, +\infty)$ έχω $\chi - 3 \geq 0$ και $1 - 2\chi \leq 0$ οπότε

$$(1) \Leftrightarrow (\chi - 3) + (2\chi - 1) = \chi^2 + 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \chi^2 - 3\chi + 6 = 0 \quad \text{εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -15 < 0. \quad \text{Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη}$$

$$\text{Τελικά η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις } \chi = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{και} \quad \chi = 1$$

$$(u) \quad |\chi^2 - 3\chi - 4| = 2|4\chi + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 - 3\chi - 4 = 2(4\chi + 2) & (\alpha) \\ \chi^2 - 3\chi - 4 = -2(4\chi + 2) & (\beta) \end{cases}$$

$$(\alpha) \Leftrightarrow \chi^2 - 3\chi - 4 = 8\chi + 4 \Leftrightarrow \chi^2 - 11\chi - 8 = 0 \quad \text{εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 153 > 0. \quad \text{Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές}$$

$$\text{τις: } \chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{11 \pm \sqrt{153}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm \sqrt{9 \cdot 17}}{2} = \frac{11 \pm 3\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = \frac{11 + 3\sqrt{17}}{2} \\ \chi_2 = \frac{11 - 3\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$(\beta) \Leftrightarrow \chi^2 - 3\chi - 4 = -8\chi - 4 \Leftrightarrow \chi^2 + 5\chi = 0 \Leftrightarrow \chi \cdot (\chi + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 0 \\ \chi = -5 \end{cases}$$

$$\text{Τελικά η εξίσωση έχει τέσσερις ρίζες τις } \chi_1 = \frac{11 + 3\sqrt{17}}{2}, \chi_2 = \frac{11 - 3\sqrt{17}}{2}, \chi_3 = 0 \quad \text{και} \quad \chi_4 = 1$$

$$(iii) \quad |\chi^2 - 2\chi| + 3|\chi^3 - \chi^2 - 2\chi| = 0 \quad \text{Σ' αυτήν την εξίσωση έχω ότι το άθροισμα των μη αρνητικών όρων } |\chi^2 - 2\chi| \text{ και } 3|\chi^3 - \chi^2 - 2\chi| \text{ ισούται με μηδέν.}$$

Για να ισχύει αυτό θα πρέπει κάθε ένας από αυτούς τους όρους να ισούται με το μηδέν, άρα

$$\text{θα πρέπει } \begin{cases} |\chi^2 - 2\chi| = 0 \\ \text{και} \\ 3|\chi^3 - \chi^2 - 2\chi| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 - 2\chi = 0 & (i) \\ \text{και} \\ \chi^3 - \chi^2 - 2\chi = 0 & (ii) \end{cases}$$

$$(i) \Leftrightarrow \chi(\chi - 2) = 0 \Leftrightarrow \chi = 0 \quad \text{ή} \quad \chi = 2$$

$$(ii) \Leftrightarrow \chi(\chi^2 - \chi - 2) = 0 \Leftrightarrow \chi(\chi + 1)(\chi - 2) = 0 \Leftrightarrow \chi = 0 \quad \text{ή} \quad \chi = -1 \quad \text{ή} \quad \chi = 2 \quad \left. \vphantom{\chi(\chi^2 - \chi - 2) = 0} \right\} \Rightarrow \chi = 0 \quad \text{ή} \quad \chi = 2$$

- 3) Εξισώσεις με ριζικά των οποίων οι υπόριζες ποσότητες έχουν παραστάσεις με τον άγνωστο (βασική σκέψη, να "διώξω" τα ριζικά, υψώνοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης σε κατάλληλη δύναμη)

Μερικές Χαρακτηριστικές Περιπτώσεις:

- (1) Μέσα σε **όλα τα ριζικά**, έχω την **ίδια παράσταση του αγνώστου** ($\sqrt[n]{A(x)}$..)

Βάζω τον **περιορισμό** $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dots$ (...λύνω την ανίσωση ως προς x ..)

→ Επιλύω την εξίσωση ως προς άγνωστο το **ριζικό** → Καταλήγω: $\sqrt[n]{A(x)} = B$ **(1)**

$$\text{ή } \sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad (2)$$

Για την **(1)** έχω: αν $B < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

αν $B = 0$ τότε η **(1)** $\Leftrightarrow A(x) = 0 \Leftrightarrow \dots$ (...λύνω..)

αν $B > 0$ Υψώνω και τα δύο μέλη της ισότητας εις την n (τάξη του ριζικού)

και έχω: **(1)** $\Leftrightarrow A(x) = (B)^n \Leftrightarrow \dots$ (...λύνω..)

Για την **(2)** βάζω επιπλέον τον **περιορισμό**: $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dots$ (...λύνω την ανίσωση ως προς x ..)

...Συνεχίζω υψώνοντας και τα δύο μέλη της ισότητας εις την n (τάξη του ριζικού) οπότε:

$$(2) \Leftrightarrow A(x) = (B(x))^n \Leftrightarrow \dots \quad (\text{...λύνω την εξίσωση ως προς } x..)$$

►► Σε κάθε περίπτωση **δέχομαι μόνο τις λύσεις που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς**

- (2) Αν παρουσιάζονται μόνο δύο διαφορετικά **ριζικά** με θετικούς συντελεστές, ίσως να μπορώ να δουλέψω με μία από τις παρακάτω μορφές

(i) $\alpha \cdot \sqrt[n]{A(x)} = \beta \cdot \sqrt[n]{B(x)}$, α, β θετικοί

Βάζω τους **περιορισμούς** $A(x) \geq 0$ και $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dots$ (...λύνω τις ανισώσεις ως προς x ..)

Υψώνω και τα δύο μέλη της ισότητας εις την **EΚΠ(κ,λ)** (για να "φύγουν" οι ρίζες)

Λύνω την εξίσωση και **δέχομαι μόνο τις λύσεις που ικανοποιούν τους περιορισμούς**

(ii) $\alpha \cdot \sqrt[n]{A(x)} + \beta \cdot \sqrt[n]{B(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 & (i) \\ \text{και} & \text{► Λύνω τις (i), (ii) και δέχομαι ως λύση της εξίσωσης μόνο τις κοινές λύσεις των (i) και (ii)} \\ B(x) = 0 & (ii) \end{cases}$

Παρατήρηση – Σχόλιο: Αν δεν είναι εύκολο να λύσεις κάποια από τις ανισώσεις των **περιορισμών** ως προς x , τότε: → θα παίρνεις κάθε μία λύση που βρήκες → θα την αντικαθιστάς στους **περιορισμούς** → αν τους επαληθεύει θα είναι δεκτή ενώ αν δεν τους επαληθεύει θα απορρίπτεται

π.χ. 1) Να λύσετε τις εξισώσεις: (i) $\sqrt{15-3x} - x = 1 - 2(1 - \sqrt{15-3x})$ (ii) $\sqrt[3]{1-13x} - \sqrt{4x+1} = 0$
(iii) $\sqrt{x^2-2x} + 3\sqrt{x^2+x-6} = 0$ (iv) $\sqrt[3]{x^3+5x^2+8x+5} = x+2$

Λύση

(i) $\sqrt{15-3x} + x = 1 - 2(1 - \sqrt{15-3x}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{15-3x} + x = 1 - 2 + 2\sqrt{15-3x} \Leftrightarrow -\sqrt{15-3x} = -x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{15-3x} = x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{15-3x})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15 - 3x = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 = 0$ εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 81 > 0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές

$$\text{τις: } \chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = 2 & \text{δεκτή} \\ \chi_2 = -7 & \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

$$(ii) \sqrt[3]{14\chi-1} - \sqrt{4\chi+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Περιορισμοί: πρέπει } 14\chi-1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq \frac{1}{14} \\ \text{και } 4\chi+1 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -\frac{1}{4} \end{array} \Rightarrow \chi \in \left(\frac{1}{14}, +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{14\chi-1} = \sqrt{4\chi+1} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{14\chi-1})^6 = (\sqrt{4\chi+1})^6 \Leftrightarrow (14\chi-1)^2 = (4\chi+1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 196\chi^2 - 28\chi + 1 = 64\chi^3 + 48\chi^2 + 12\chi + 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 64\chi^3 - 148\chi^2 + 40\chi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\chi(16\chi^2 - 37\chi + 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 0 & \text{απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ 16\chi^2 - 37\chi + 10 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Η (β) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 37^2 - 4 \cdot 16 \cdot 10 = 729 > 0$.

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$$\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{37 \pm \sqrt{729}}{2 \cdot 16} = \frac{37 \pm \sqrt{3^6}}{32} = \frac{37 \pm 3^3}{32} = \frac{37 \pm 27}{32} \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = 2 & \text{δεκτή} \\ \chi_2 = \frac{5}{16} & \text{δεκτή} \end{cases}$$

(iii) $\sqrt{\chi^2-2\chi} + 3 \cdot \sqrt[5]{\chi^2+\chi-6} = 0$ Σ' αυτήν την εξίσωση έχω ότι το άθροισμα των μη αρνητικών όρων $\sqrt{\chi^2-2\chi}$ και $3 \cdot \sqrt[5]{\chi^2+\chi-6}$ ισούται με μηδέν. Όμως για να ισχύει αυτό θα πρέπει κάθε ένας από αυτούς τους όρους να ισούται με το μηδέν, άρα θα πρέπει

$$\begin{cases} \sqrt{\chi^2-2\chi} = 0 \\ \text{και} \\ 3 \cdot \sqrt[5]{\chi^2+\chi-6} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2-2\chi = 0 \\ \text{και} \\ \chi^2+\chi-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi(\chi-2) = 0 \\ \text{και} \\ (\chi-2)(\chi+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 0 \text{ ή } \chi = 2 \\ \text{και} \\ \chi = 2 \text{ ή } \chi = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \chi = 2$$

"δύσκολα" λύνεται ως προς χ

$$(iv) \sqrt[3]{\chi^3+5\chi^2+8\chi+5} = \chi+2 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Περιορισμοί: πρέπει: } \chi^3+5\chi^2+8\chi+5 \geq 0 \quad (1) \\ \text{και } \chi+2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq -2 \quad (2) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{\chi^3+5\chi^2+8\chi+5})^3 = (\chi+2)^3 \Leftrightarrow \chi^3+5\chi^2+8\chi+5 = \chi^3+6\chi^2+12\chi+8 \Leftrightarrow \chi^2+4\chi+3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\chi+1)(\chi+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = -1 \\ \text{ή} \\ \chi = -3 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Παρατηρώ ότι η λύση } \chi = -3 \text{ δεν ικανοποιεί τον περιορισμό} \\ (2), \text{ επομένως απορρίπτεται. Η λύση } \chi = -1, \text{ ικανοποιεί τον} \\ \text{περιορισμό } (2), \text{ όμως για να είναι δεκτή θα πρέπει να ικανοποιεί και τον περιορισμό } (1). \end{array}$$

Με δοκιμή έχω: $(-1)^3 + 5(-1)^2 + 8(-1) + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 + 5 - 8 + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 0$ που ισχύει, άρα η $\chi = -1$, είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

Χρήσιμη παρατήρηση: Αν (με έμμεσο ή με άμεσο τρόπο) δεις ότι στην εξίσωση, ο άγνωστος χ επαναλαμβάνεται σε μία παράσταση ή σε παραστάσεις που διαφέρουν κατά μία σταθερά, τότε ονόμασε την παράσταση που επαναλαμβάνεται y

π.χ. 1) Να λύσετε τις εξισώσεις: (i) $3\chi^4 - 7\chi^2 - 6 = 0$ (ii) $3\chi^6 + 2\chi^3 - 1 = 0$ (iii) $\chi^2 - 2|\chi| - 3 = 0$

(iv) $\left(\chi - \frac{2}{\chi}\right)^2 - 3\left(\chi - \frac{2}{\chi}\right) - 4 = 0$ (v) $4\chi^2 - 4\chi + 1 = 3|2\chi - 1|$

(vi) $(\chi^2 - 5\chi + 1)^3 - 3(\chi^2 - 5\chi)^2 + 3\chi^2 - 15\chi = 21$

Λύση

Βλέπω ότι αντικαθιστώντας $\chi^4 = (\chi^2)^2$ θα προκύψει εξίσωση 2^{ου} βαθμού με άγνωστο το χ^2

Αφού $\chi^2 \geq 0$

(i) $3\chi^4 - 7\chi^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3(\chi^2)^2 - 7\chi^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 7y - 6 = 0$ εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 121 > 0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm 11}{6} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -\frac{2}{3} < 0 \end{cases}$ δεκτή απορρίπτεται

οπότε $\chi^2 = 3 \Leftrightarrow \chi = \pm\sqrt{3}$

Βλέπω ότι αντικαθιστώντας $\chi^6 = (\chi^3)^2$ θα προκύψει εξίσωση 2^{ου} βαθμού με άγνωστο το χ^3

(ii) $3\chi^6 + 2\chi^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow 3(\chi^3)^2 + 2\chi^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 2y - 1 = 0$ εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16 > 0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$ Οπότε

για $y = 1 \Rightarrow \chi^3 = 1 \Leftrightarrow \chi = 1$ και για $y = -\frac{1}{3} \Rightarrow \chi^3 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \chi = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \chi = -\frac{1 \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^3}} = -\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$

Θυμηθείτε πως όταν συνυπάρχει το $|\chi|$ και το χ^2 ίσως βοηθηθώ αν γράψω $\chi^2 = |\chi|$

Αφού $|\chi| \geq 0$

(iii) $\chi^2 - 2|\chi| - 3 = 0 \Leftrightarrow 3|\chi|^2 - 2|\chi| - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$ εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -1 < 0 \end{cases}$ δεκτή απορρίπτεται

Οπότε $|\chi| = 3 \Leftrightarrow \chi = \pm 3$

Παρατηρώ ότι ο άγνωστος χ επαναλαμβάνεται στην παράσταση $\chi - \frac{2}{\chi} \rightarrow$ την αντικαθιστώ

(iv) $\left(\chi - \frac{2}{\chi}\right)^2 - 3\left(\chi - \frac{2}{\chi}\right) - 4 = 0$ Περιορισμοί: πρέπει $\chi \neq 0$ Θέτω $\chi - \frac{2}{\chi} = y$ και έχω

$y^2 - 3y - 4 = 0$ εξίσωση 2^{ου} βαθμού με Διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25 > 0$.

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -1 \end{cases} \quad \text{Οπότε}$$

για $y=4 \Rightarrow x - \frac{2}{x} = 4 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x \cdot x - x \cdot \frac{2}{x} = x \cdot 4 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$ εξίσωση 2^{ου} βαθμού

με Διακρίνουσα: $\Delta' = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 24 > 0$. Άρα έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{6} \\ x_2 = 2 - \sqrt{6} \end{cases} \quad \text{που είναι δεκτές και}$$

για $y=-1 \Rightarrow x - \frac{2}{x} = -1 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x \cdot x - x \cdot \frac{2}{x} = x \cdot (-1) \Leftrightarrow x^2 - 2 = -x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ εξίσωση 2^{ου} βαθμού

με Διακρίνουσα: $\Delta'' = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$. Άρα έχει δύο ρίζες διαφορετικές τις:

$$x_{3,4} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases} \quad \text{που είναι δεκτές}$$

Παρατηρώ ότι το $4x^2 - 4x + 1$ είναι το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(2x-1)^2$ οπότε ο άγνωστος επαναλαμβάνεται στην παράσταση $|2x-1|$ που θα την ονομάσω y

$$(v) \quad 4x^2 - 4x + 1 = 3|2x-1| \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 3|2x-1| \stackrel{(2x-1)^2 = |2x-1|^2}{\Leftrightarrow} |2x-1|^2 = 3|2x-1| \quad \text{Θέτω } |2x-1| = y \geq 0$$

οπότε έχω $y^2 = 3y \Leftrightarrow y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow y(y-3) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 3$, δεκτές τιμές για το y

Για $y=0$ έχω $|2x-1|=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Για $y=3$ έχω $|2x-1|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \\ \text{ή} \\ 2x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{cases}$

Θυμάμαι ότι αν υπάρχουν παρενθέσεις δεν βιάζομαι να τις "διώξω". Κοιτάζω τους εκτός παρενθέσεων όρους και έχω: εξίσωση $\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 1)^3 - 3(x^2 - 5x)^2 + 3x^2 - 15x - 21 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 1)^3 - 3(x^2 - 5x)^2 + 3(x^2 - 5x - 7) = 0$ άρα ο άγνωστος επαναλαμβάνεται σε παραστάσεις που διαφέρουν κατά μία σταθερά

$$(v) \quad (x^2 - 5x + 1)^3 - 3(x^2 - 5x)^2 + 3x^2 - 15x - 21 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 1)^3 - 3(x^2 - 5x)^2 + 3x^2 - 15x - 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 5x + 1)^3 - 3(x^2 - 5x)^2 + 3(x^2 - 5x - 7) = 0 \quad (I) \quad \text{Με συμφέρει να θέσω } x^2 - 5x + 1 = y \text{ για να έχω λιγότερες πράξεις}$$

Θέτω $x^2 - 5x + 1 = y$ οπότε $x^2 - 5x = y - 1$ και $x^2 - 5x - 7 = y - 8$ άρα

$$(I) \Leftrightarrow y^3 - 3(y-1)^2 + 3(y-8) = 0 \Leftrightarrow y^3 - 3(y^2 - 2y + 1) + 3y - 24 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 3y^2 + 9y - 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2(y-3) + 9(y-3) = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y^2 + 9) = 0 \stackrel{y^2 + 9 \neq 0}{\Leftrightarrow} y = 3$$

Εξίσωση 3^{ου} βαθμού,
→ παραγοντοποίηση...

Άρα $x^2 - 5x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$